

問題 1 * (4点×8=32点)

以下の不定積分、および定積分を計算せよ。

(1) $\int (3x^2 + 4x + 5) dx$

(2) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(3) $\int e^{-3x} dx$

(4) $\int (3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2 + 1)^4 dx$

(5) $\int x \cos x dx$

(6) $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

(7) $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$

(8) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$

問題 2 * (3点+5点+5点=13点)

直線 $y = x$ と、放物線 $y = x^2$ で囲まれる領域を D とする。

(2-1) 領域 D を xy 平面に図示せよ。

(2-2) 領域 D の面積を求めよ。

(2-3) 領域 D を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

問題 3 * (5点×3=15点)

以下の微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(3-1) $y' = 2y$ $(x, y) = (0, 3)$

(3-2) $y' = y^2 x^2$ $(x, y) = (0, 1)$

(3-3) $y' - 3y = e^{2x}$ $(x, y) = (0, 0)$

問題 4 * (5点×2=10点)

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(4-1) $y'' + y = 0$

(4-2) $y'' + 2y' - 8y = 0$

問題5 ** (5点×2=10点)

被積分関数が、積分範囲の右端 $x = 3$ で発散することに注意して、以下の広義積分の収束、発散を調べ、収束する場合にはその値を求めよ。

(5-1) $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2}$

(5-2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$

問題6 ** (5点×3=15点)

(6-1) xy 平面をボールが運動している。時刻 t におけるボールの位置が $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ で与えられるとき、時刻 $0 < t < 2\pi$ の間にボールが描く軌跡の全長を求めよ。

(6-2) 極方程式 $r = e^\theta$ ($0 < \theta < \pi/2$) で表される曲線と、 x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(6-3) 半径 r の球の体積 V を求めよ。

問題7 *** (5点)

定積分 $\int_1^{e^\pi} \sin(\log x) dx$ の値を求めよ。

問題8 *** (3点+7点=10点)

定積分 $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$ の値を求めたい。

(8-1) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \int_0^{\pi/4} \log(\cos x) dx$ を示せ。

(8-2) 上で示した式をヒントに、定積分 $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$ の値を求めよ。

問題9 *** (3点+7点=10点)

定積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めたい。

(9-1) 収束因子 e^{-ax} を導入し、 a の関数 $f(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ を考える。 $f'(a)$ を計算せよ。

(9-2) 上の計算結果をヒントに、定積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ。