数学 II　期末試験

2014 年 1 月 21 日　　担当：佐藤 純

1. 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' + y' - 2y = -2x^2 + 4x - 1$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ の解は $\lambda = 1, -2$ なので、斉次方程式の一般解は $y = Ae^x + Be^{-2x}$ となる。

次に、特解を求める。

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおく。微分すると、

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} &2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \\ &= -2x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

より、

$$-2a = -2, \quad 2a - 2b = 4, \quad 2a + b - 2c = -1$$

を得る。これを解くと

$$(a, b, c) = (1, -1, 1)$$

なので、特解は

$$y = x^2 - x + 1$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} + x^2 - x + 1$$

となる。

(2) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ の解は $\lambda = 2, -3$ なので、斉次方程式の一般解は $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ となる。

次に、特解を求める。微分方程式の右辺が基本解と一致しているので、

$$y = axe^{2x}$$

とおく。微分すると、

$$y' = e^{2x}(2ax + a), \quad y'' = e^{2x}(4ax + 4a)$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$e^{2x}(4ax + 4a + 2ax + a - 6ax) = 5ae^{2x} = e^{2x}$$

より、

$$a = 1/5$$

なので、特解は

$$y = \frac{1}{5}xe^{2x}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = \left(\frac{1}{5}x + A\right)e^{2x} + Be^{-3x}$$

となる。

(3) $y'' - y' - 2y = \cos x$

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ の解は $\lambda = -1, 2$ なので、斉次方程式の一般解は $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$ となる。

次に、特解を求める。

$$y = a\sin x + b\cos x$$

とおく。微分すると、

$$y' = a\cos x - b\sin x, \quad y'' = -a\sin x - b\cos x$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} &(-a\sin x - b\cos x) - (a\cos x - b\sin x) - 2(a\sin x + b\cos x) \\ &= (-3a + b)\sin x + (-a - 3b)\cos x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

より、

$$-3a + b = 1, \quad -a - 3b = 0$$

を得る。これを解くと

$$(a, b) = (-1/10, -3/10)$$

なので、特解は

$$y = -\frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$$

となる。

2.

(1) $z = 3x^2y - 2xy^2$ のとき、全微分 $\mathrm{d}z$ を求めよ。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y^2, \\ &\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4xy, \\ &\mathrm{d}z = (6xy - 2y^2)\mathrm{d}x + (3x^2 - 4xy)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

(2) 2 変数関数 $f(x, y) = e^{xy}$ に対し、

二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を全て計算せよ。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}) = y^2e^{xy}, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2e^{xy}, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = (1 + xy)e^{xy}, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = (1 + xy)e^{xy}. \end{aligned}$$

3. 位置ベクトルを

$$\vec{r} = (x, y, z)$$
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と書くとき、以下の量を計算せよ。

(1) $\vec{\nabla} r$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(x^2+y^2+z^2)' \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}2x \\ &= x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= \frac{x}{r}\end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

以上より、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r}(x, y, z) \\ &= \frac{\vec{r}}{r}.\end{aligned}$$

(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$

(3) $\vec{\nabla} \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x^2+y^2+z^2)' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x \\ &= -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ &= -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\ &= -\frac{x}{r^3}\end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$$

以上より、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} r &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) \\ &= \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) \\ &= -\frac{1}{r^3}(x, y, z) \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3}.\end{aligned}$$

4. 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形で囲まれる領域を D とするとき、二重積分 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ の値を計算せよ。

$$D = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y xy \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}x(1-x)^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x(x^3 - 2x^2 + x) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$