数学II　第15回　重積分

2014年1月14日

担当：佐藤 純

問題1

以下の多重積分を計算せよ。

(1-1) $\displaystyle\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y xy \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^x \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}x^3 \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

(1-2) $\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x$

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^x \mathrm{d}y\ y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^x \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{15}\end{aligned}$$

(1-3) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: x \ge 0, y \ge 0,\ x + y \le 1$

領域Dは、3点$(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$を頂点とする三角形の内部である。

$$\begin{aligned}D &= \{x \ge 0, y \ge 0,\ x + y \le 1\} \\ &= \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y (x+y)^2 \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^{1-x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{3}(1-x^3) \\
&= \frac{1}{3}\left[x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(1-4) $\displaystyle\iint_D y \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \qquad D: y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1$

領域 D は、中心 $(0,0)$, 半径 1 の上半円の内部である。

$$
\begin{aligned}
D &= \{y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\} \\
&= \{-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D y \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\ y \\
&= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}(1-x^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

問題 2

積分の順序を交換することによって、以下の多重積分を計算せよ。

(2-1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}x e^{\frac{y}{x}}$

領域 D は、3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形の内部である。

$$
\begin{aligned}
D &= \{0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\} \\
&= \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\},
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}x e^{\frac{y}{x}} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y\ e^{\frac{y}{x}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_0^x \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x (xe - x) \\
&= (e-1) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{e-1}{2}
\end{aligned}
$$

(2-2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{y}{x}\pi\right)$

領域 D は、直線 $y = x$ と放物線 $y = x^2$ によって囲まれる領域である。

$$
\begin{aligned}
D &= \{0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{y}\} \\
&= \{0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{y}{x}\pi\right) &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\ \ \sin\left(\frac{y}{x}\pi\right) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[-\frac{x}{\pi} \cos\left(\frac{y}{x}\pi\right) \right]_{x^2}^{x} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{x}{\pi} \cos\pi \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}x x \left(1 + \cos(\pi x)\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}x x \left(x + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right)' \\
&= \frac{1}{\pi} \left[x \left(x + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}x \left(x + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2}(-1) + \frac{1}{\pi^2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{\pi^3}
\end{aligned}
$$