数学 II　第 8 回　2 階線形微分方程式

2013 年 11 月 12 日

担当：佐藤 純

問題 1

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1-1) $y'' + y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する。これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0, \\
&e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) = 0, \\
&\lambda^2 + 1 = 0, \\
&\lambda = \pm \mathrm{i}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った。

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して、2 つの独立解 $y = e^{\mathrm{i}x}$, $y = e^{-\mathrm{i}x}$ を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{\mathrm{i}x} + Be^{-\mathrm{i}x} \quad (A, B \text{ は積分定数}) \tag{1}$$

となる。

あるいは、指数関数をオイラーの公式を使って三角関数に直すと、

$$\begin{aligned}
y &= Ae^{\mathrm{i}x} + Be^{-\mathrm{i}x} \\
&= A(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + B(\cos x - \mathrm{i}\sin x) \\
&= (A + B)\cos x + \mathrm{i}(A - B)\sin x \\
&= C\cos x + D\sin x \quad (C, D \text{ は積分定数})
\end{aligned} \tag{2}$$

となる。ただし、$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた。

上の (1) 式と (2) 式は等価であり、どちらを使ってもよいが、初期値問題を解く際には (2) 式の方が楽なことが多いので、以下の問題では断りなく (2) 式の形に書き換えることもある。

(1-2) $y'' - 9y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する。これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda x} - 9e^{\lambda x} = 0, \\
&e^{\lambda x}(\lambda^2 - 9) = 0, \\
&\lambda^2 - 9 = 0, \\
&\lambda = \pm 3
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った。

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して、2 つの独立解 $y = e^{3x}$, $y = e^{-3x}$ を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる。

(1-3) $y'' + y' - 2y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する。これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0, \\
&e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0, \\
&\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \\
&(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0, \\
&\lambda = 1, -2
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った。

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して、2つの独立解 $y = e^{x}$, $y = e^{-2x}$ を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{x} + Be^{-2x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

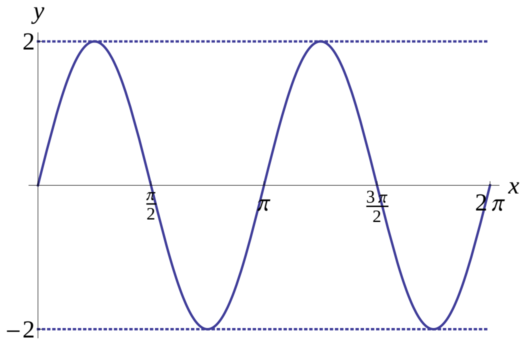
となる。

問題 2

以下の微分方程式を初期条件 [$x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 4$] のもとに解き、グラフの概形を描け。

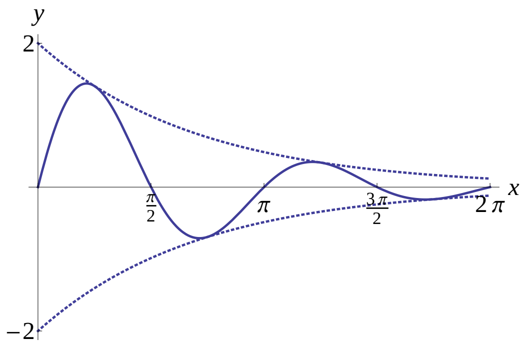
(2-1) $y'' + 4y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ の解は $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$ なので、一般解は $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ となる。これを微分すると $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ となる。初期条件より、$0 = A$, $4 = 2B$ なので、$y = 2\sin 2x$ を得る。



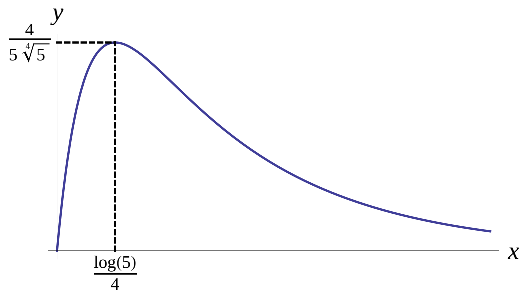
(2-2) $y'' + 6y' + 13y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ の解は $\lambda = -3 \pm 2\mathrm{i}$ なので、一般解は $y = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ となる。これを微分すると $y' = e^{-3x}(-3A\cos 2x - 3B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$ となる。初期条件より、$0 = A$, $4 = 2B$ なので、$y = 2e^{-3x}\sin 2x$ を得る。



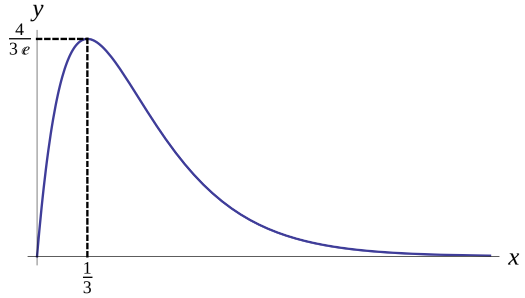
(2-3) $y'' + 6y' + 5y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ の解は $\lambda = -1, -5$ なので、一般解は $y = Ae^{-x} + Be^{-5x}$ となる。これを微分すると $y' = -Ae^{-x} - 5Be^{-5x}$ となる。初期条件より、$0 = A + B$, $4 = -A - 5B$ なので、$y = e^{-x} - e^{-5x}$ を得る。



(2-4) $y'' + 6y' + 9y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ の解は $\lambda = -3$(重解) なので、一般解は $y = e^{-3x}(Ax + B)$ となる。これを微分すると $y' = e^{-3x}(-3Ax - 3B + A)$ となる。初期条件より、$0 = B$, $4 = -3B + A$ なので、$y = 4xe^{-3x}$ を得る。



問題 3

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(3-1) $y'' + y' - 2y = x^2 + 2$

特性方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$ の解は $\lambda=1,-2$ なので、斉次方程式の一般解は $y=Ae^x+Be^{-2x}$ となる。

次に、特解を求める。

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

とおく。微分すると、

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a \tag{4}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} &2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \\ &= x^2 + 2 \end{aligned} \tag{5}$$

より、

$$-2a = 1, \quad 2a - 2b = 0, \quad 2a + b - 2c = 2 \tag{6}$$

を得る。これを解くと

$$(a, b, c) = (-1/2, -1/2, -7/4) \tag{7}$$

なので、特解は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \tag{8}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \tag{9}$$

となる。

(3-2)

$$y'' + y' - 2y = e^{2x} \tag{10}$$

特性方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$ の解は $\lambda=1,-2$ なので、斉次方程式の一般解は $y=Ae^x+Be^{-2x}$ となる。

次に、特解を求める。

$$y = ae^{2x} \tag{11}$$

とおく。微分すると、

$$y' = 2ae^{2x}, \quad y'' = 4ae^{2x} \tag{12}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} 4ae^{2x} + 2ae^{2x} - 2ae^{2x} &= 4ae^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned} \tag{13}$$

より、

$$a = 1/4 \tag{14}$$

なので、特解は

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} \tag{15}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^{x} + Be^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \tag{16}$$

となる。

(3-3)

$$y'' + y' - 2y = \sin x \tag{17}$$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ の解は $\lambda = 1, -2$ なので、斉次方程式の一般解は $y = Ae^{x} + Be^{-2x}$ となる。

次に、特解を求める。

$$y = a\sin x + b\cos x \tag{18}$$

とおく。微分すると、

$$y' = a\cos x - b\sin x, \quad y'' = -a\sin x - b\cos x \tag{19}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned}&(-a\sin x - b\cos x) + (a\cos x - b\sin x) - 2(a\sin x + b\cos x)\\&= (-3a - b)\sin x + (a - 3b)\cos x\\&= \sin x\end{aligned} \tag{20}$$

より、

$$-3a - b = 1, \quad a - 3b = 0 \tag{21}$$

を得る。これを解くと

$$(a, b) = (-3/10, -1/10) \tag{22}$$

なので、特解は

$$y = -\frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x \tag{23}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^{x} + Be^{-2x} - \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x \tag{24}$$

となる。

(3-4)

$$y'' + y' - 2y = e^x \tag{25}$$

特性方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$ の解は $\lambda=1,-2$ なので、斉次方程式の一般解は $y=Ae^x+Be^{-2x}$ となる。

次に、特解を求める。微分方程式の右辺が基本解と一致しているので、

$$y = axe^x \tag{26}$$

とおく。微分すると、

$$y' = e^x(ax+a), \quad y'' = e^x(ax+2a) \tag{27}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$e^x(ax+2a+ax+a-2ax) = 3ae^x = e^x \tag{28}$$

より、

$$a = 1/3 \tag{29}$$

なので、特解は

$$y = \frac{1}{3}xe^x \tag{30}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x \tag{31}$$

となる。

(3-5)

$$y'' + 4y = \sin 2x \tag{32}$$

特性方程式 $\lambda^2+4=0$ の解は $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$ なので、斉次方程式の一般解は $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ となる。

次に、特解を求める。微分方程式の右辺が基本解と一致しているので、

$$y = x(a\cos 2x + b\sin 2x) \tag{33}$$

とおく。微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= (a\cos 2x + b\sin 2x) + x(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) \\ y'' &= (-4a\sin 2x + 4b\cos x) + x(-4a\cos 2x - 4b\sin 2x) \end{aligned} \tag{34}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} &(-4a\sin 2x + 4b\cos x) + x(-4a\cos 2x - 4b\sin 2x) + 4x(a\cos 2x + b\sin 2x) \\ &= -4a\sin 2x + 4b\cos x \\ &= \sin 2x \end{aligned} \tag{35}$$

より、

$$a = -1/4, \quad b = 0 \tag{36}$$

なので、特解は

$$y = -\frac{1}{4}x\cos 2x \tag{37}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = A\cos 2x + B\sin 2xA - \frac{1}{4}x\cos 2x \tag{38}$$

となる。