数学II　第7回　微分方程式 I

2013年11月05日

担当：佐藤 純

問題1

以下の微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(1-1) $y' = 3y$　　　$(x, y) = (0, 2)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\int \mathrm{d}x, \\
&\log|y| = 3x + C, \\
&|y| = e^{3x+C} = e^C e^{3x}, \\
&y = \pm e^C e^{3x}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\pm e^C = A$ とおくと、$y = Ae^{3x}$ となる。初期条件より、$x = 0$ のとき $y = 2$ なので、$A = 2$ である。よって、$y = 2e^{3x}$ を得る。

(1-2) $y' = x(1 - y)$　　　$(x, y) = (0, 0)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(1-y), \\
&\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = x\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int x\mathrm{d}x, \\
&-\log|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + C, \\
&|1-y| = e^{-\frac{1}{2}x^2 - C} = e^{-C}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \\
&1 - y = \pm e^{-C}e^{-\frac{1}{2}x^2}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\pm e^{-C} = A$ とおくと、$1 - y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ となる。初期条件より、$x = 0$ のとき $y = 0$ なので、$1 - 0 = Ae^0$ より、$A = 1$ である。よって、$y = 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}$ を得る。

(1-3) $y' = y^2x^3$　　　$(x, y) = (0, 1)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2x^3, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x^3\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x^3\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}x^4+C.$$

初期条件より、$x=0$ のとき $y=1$ なので、$C=-1$ である。よって、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{4}x^4-1=\frac{x^4-4}{4},\\ y&=\frac{4}{4-x^4}\end{aligned}$$

を得る。

(1-4) $yy'=x \qquad (x,y)=(1,0)$

$$\begin{aligned}&y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x,\\ &\int y\mathrm{d}y=\int x\mathrm{d}x,\\ &\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+C.\end{aligned}$$

初期条件より、$x=1$ のとき $y=0$ なので、$C=-\frac{1}{2}$ である。よって、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2},\\ &x^2-y^2=1\end{aligned}$$

を得る。

(1-5) $y'+y\tan x=0 \qquad (x,y)=(0,1)$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y\tan x,\\ &\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\tan x\mathrm{d}x,\\ &\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\tan x\mathrm{d}x,\\ &\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}\mathrm{d}x,\\ &\log|y|=\log|\cos x|+C,\\ &y=A\cos x.\end{aligned}$$

初期条件より、$x=0$ のとき $y=1$ なので、$A=1$ である。よって、

$$y=\cos x$$

を得る。

(1-6) $y' = \dfrac{x-y}{x+y} \qquad (x,y)=(0,0)$

$$y' = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

ここで、$t=\frac{y}{x}$ とおくと、$y=tx$ の両辺を x で微分して、$y'=t'x+t$ である。よって、

$$\begin{aligned}
&t'x+t = \frac{1-t}{1+t},\\
&t'x = \frac{1-t}{1+t} - t = \frac{1-2t-t^2}{1+t},\\
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{1-2t-t^2}{1+t},\\
&\int \frac{1+t}{1-2t-t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},\\
&-\frac{1}{2}\log|1-2t-t^2| = \log|x| + C,\\
&\log|1-2t-t^2| = -2\log|x| - 2C = \log\frac{1}{x^2} - 2C,\\
&1-2t-t^2 = \frac{A}{x^2},\\
&x^2-2xy-y^2 = A
\end{aligned}$$

を得る。初期条件より $A=0$ なので、$x^2-2xy-y^2=0$ となる。

(1-7) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2} \qquad (x,y)=(0,1)$

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

ここで、$t=\frac{y}{x}$ とおくと、$y=tx$ の両辺を x で微分して、$y'=t'x+t$ である。よって、

$$\begin{aligned}
&t'x+t = \frac{2t}{1-t^2},\\
&t'x = \frac{2t}{1-t^2} - t = \frac{t+t^3}{1-t^2},\\
&\int \frac{1-t^2}{t+t^3}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{1-t^2}{t+t^3} = \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

とおいて、定数 a,b,c を決定する。

$$\frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} = \frac{a+at^2+bt^2+ct}{t(1+t^2)}$$

なので、恒等式 $1-t^2 = a + at^2 + bt^2 + ct$ が成り立つためには、$a+b=-1$, $c=0$, $a=1$ なので、これを解いて $a=1$, $b=-2$, $c=0$ を得るよって、

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1-t^2}{t+t^3}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
&\int \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
&\log\left|\frac{t}{1+t^2}\right| = \log|x| + C, \\
&\frac{t}{1+t^2} = Ax, \\
&\frac{y}{x^2+y^2} = A
\end{aligned}
$$

を得る。初期条件より $A=1$ なので、$x^2+y^2-y=0$ となる。

(1-8) $y' - y = x \qquad (x,y)=(0,0)$

右辺をゼロにおいた、斉次方程式 $y'-y=0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x, \\
&\log|y| = x + C, \\
&y = Ae^x
\end{aligned}
$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&A'e^x + Ae^x - Ae^x = x, \\
&A' = xe^{-x}
\end{aligned}
$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$
\begin{aligned}
A &= \int xe^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int x(-e^{-x})'\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x} + \int (x)'e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + C
\end{aligned}
$$

と A が求まる。これを $y=Ae^x$ に代入して、$y = Ce^x - x - 1$ を得る。初期条件より $C=1$ なので、

$$y = e^x - x - 1$$

となる。

(1-9) $y' - 2y = e^x \qquad (x, y) = (0, 0)$

右辺をゼロにおいた、斉次方程式 $y' - 2y = 0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\mathrm{d}x, \\
&\log|y| = 2x + C, \\
&y = Ae^{2x}
\end{aligned}$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&A'e^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = e^x, \\
&A' = e^{-x}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$A = -e^{-x} + C$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{2x}$ に代入して、$y = Ce^{2x} - e^x$ を得る。初期条件より $C = 1$ なので、

$$y = e^{2x} - e^x$$

となる。

(1-10) $y' + xy = x^3 \qquad (x, y) = (0, 0)$

右辺をゼロにおいた、斉次方程式 $y' + xy = 0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int x\mathrm{d}x, \\
&\log|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C, \\
&y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&A'e^{-\frac{1}{2}x^2} - xAe^{-\frac{1}{2}x^2} + xAe^{-\frac{1}{2}x^2} = x^3, \\
&A' = x^3e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$
\begin{aligned}
A &= \int x^3 e^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int x^2 (e^{\frac{1}{2}x^2})' \mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - \int (x^2)' e^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int x e^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + C
\end{aligned}
$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ に代入して、$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2$ を得る。初期条件より $C = 2$ なので、

$$
y = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2
$$

となる。

(1-11) $y' + y\cos x = \sin 2x \qquad (x, y) = (0, 0)$

右辺をゼロにおいた、斉次方程式 $y' + y\cos x = 0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\cos x, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x \mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \cos x \mathrm{d}x, \\
&\log|y| = -\sin x + C, \\
&y = Ae^{-\sin x}
\end{aligned}
$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&A'e^{-\sin x} - \cos x Ae^{-\sin x} + \cos x Ae^{-\sin x} = \sin 2x, \\
&A' = \sin 2x e^{\sin x}
\end{aligned}
$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$
\begin{aligned}
A &= \int \sin 2x e^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int \sin x \cos x e^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int (\sin x)' \sin x e^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int t e^t \mathrm{d}t \qquad (t = \sin x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int t(e^t)'\mathrm{d}t \\
&= 2te^t - 2\int (t)'e^t\mathrm{d}t \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C
\end{aligned}
$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{-\sin x}$ に代入して、$y = Ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)e^{\sin t}$ を得る。初期条件より $C = 2$ なので、

$$y = 2(e^{-\sin x} + \sin x - 1)$$

となる。