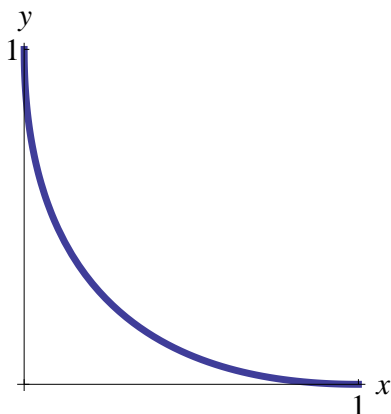


問題1

(1-1) 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ を xy 平面上に図示せよ。

$0 \leq \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \leq 1$ より、 $0 \leq x \leq 1$ である。同様に、 $0 \leq y \leq 1$ を得る。よって、グラフは $0 \leq x, y \leq 1$ の範囲内にある。また、グラフは2点 $(1, 0)$ と $(0, 1)$ を通る。曲線の式を y について解くと、 $y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}$ となり、これを微分すると $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ となる。

曲線の式を直接微分して、 $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = 0$ として、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ としても同じ結果を得る。範囲 $0 < x < 1$ において $y' < 0$ であり、 $\lim_{x \rightarrow +0} y' = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} y' = 0$ より、下図のようなグラフになる。

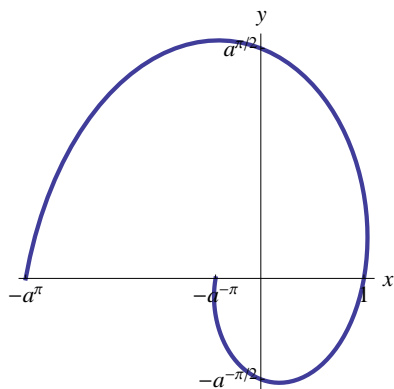


(1-2) 上で描いた曲線と、 x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 dx (1 + x - 2\sqrt{x}) \\ &= \left[x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

問題2

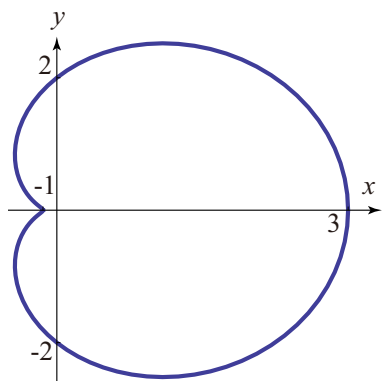
(2-1) 極方程式 $r = a^\theta$ ($a > 0, -\pi < \theta < \pi$) で表される曲線を、 xy 平面上に図示せよ。



(2-2) 上で描いた曲線のうち、 $0 < \theta < \pi/2$ の部分と、 x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{2} r^2 \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{2} a^{2\theta} \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{2} e^{2\theta \log a} \\
 &= \left[\frac{1}{4 \log a} e^{2\theta \log a} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \left[\frac{1}{4 \log a} a^{2\theta} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{4 \log a} (a^\pi - 1)
 \end{aligned}$$

(2-3) 極方程式 $r = 2 + \cos \theta$ ($a > 0, -\pi < \theta < \pi$) で表される曲線を、 xy 平面上に図示せよ。



(2-4) 上で描いた閉曲線が囲む面積を求めよ。

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} r^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} (2 + \cos \theta)^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} \left(4 + 4 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{9}{4} + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \\
&= \left[\frac{9}{4} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{9}{2} \pi.
\end{aligned}$$

問題 3

xy 平面をボールが運動している。時刻 t におけるボールの位置ベクトルは、 $\vec{r} = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ で与えられるとする。

(3-1) 時刻 $0 < t < 2\pi$ の間に描くボールの軌跡を xy 平面に図示せよ。

まず、 $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ において、ボールは $(x, y) = (0, 0), (\pi/2 - 1, 1), (\pi, 2), (3\pi/2 + 1, 1), (2\pi, 0)$ を通るので、これら四点を順に結べばよい。

次に、微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 1 - \cos t, \\
\frac{dy}{dt} &= \sin t
\end{aligned}$$

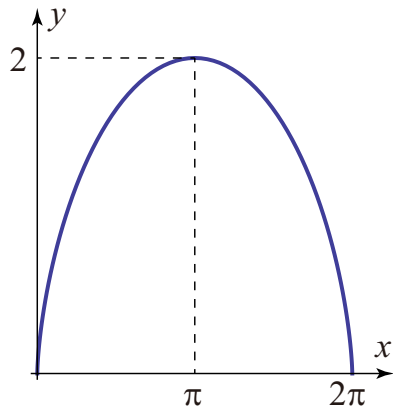
より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

となるので、増減表は

x	0	~	π	~	2π
y'	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$
y	0	↗	2	↘	0

となる。



(3-2) 上で描いた曲線の全長を求めよ。

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 - \cos t} \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} dt \sin \frac{t}{2} \\
 &= 4 \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

問題 4

(4-1) 底面積 S , 高さ h の円錐の体積 V を求めよ。

高さ z における円錐の断面積 $f(z)$ は、

$$f(z) = \frac{S}{h^2} (h - z)^2$$

で与えられるので、体積 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h dz f(z) \\
 &= \frac{S}{h^2} \int_0^h dz (h - z)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S}{h^2} \left[-\frac{1}{3}(h-z)^3 \right]_0^h \\
&= \frac{hS}{3}
\end{aligned}$$

となる。

(4-2) 半径 r の球の体積 V を求めよ。

高さ z における球の断面積 $f(z)$ は、

$$f(z) = \pi(r^2 - z^2)$$

で与えられるので、体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^r dz f(z) \\
&= \pi \int_{-r}^r dz (r^2 - z^2) \\
&= \pi \left[r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-r}^r \\
&= \frac{4}{3} \pi r^3.
\end{aligned}$$

となる。

(4-3) 円 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, ($0 < a < b$) が x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

円の式を y について解くと、

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

なので、 x における立体の断面積 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned}
f(x) &= \pi \left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \pi \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \\
&= 4\pi b \sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$

となる。よって、この立体の体積 V は、

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^a dx f(x) \\
&= 4\pi b \int_{-a}^a dx \sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$

となる。

$x = a \sin t$ とすると、

$$V = 4\pi b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt (a \cos t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \cos^2 t \\ &= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \frac{1 + \cos 2t}{2} \\ &= 4\pi a^2 b \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi^2 a^2 b \end{aligned}$$

を得る。