数学II　第3回　級数

2013年10月08日

担当：佐藤 純

問題1

無限級数 $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ の値を求めたい。

(1-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

を示せ。

等比級数の公式：
$S = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{N-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} S &= 1 + t + t^2 + \cdots + t^{N-1} \\ tS &= t + t^2 + \cdots + t^{N-1} + t^N \end{aligned}$$

この2式を辺々引き算すると

$$(1-t)S = 1 - t^N$$

となるので、

$$S = \frac{1-t^N}{1-t}$$

を得る。ここで、$|t| < 1$ ならば $\lim_{N\to\infty} t^N = 0$ なので、

$$1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t} \tag{1}$$

を得る。
式 (1) において、$t = -x$ とすることにより、与式を得る。

(1-2) 上式の両辺を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分することにより、無限級数 s の値を求めよ。

$$\begin{gathered} \int_0^1 \mathrm{d}x(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}, \\ \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots\right]_0^1 = \left[\log|1+x|\right]_0^1, \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2. \end{gathered}$$

問題 2

無限級数 $s = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \cdots$ の値を求めたい。

(2-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$$

を示せ。

式 (1) において、$t = -x^2$ とすることにより、与式を得る。

(2-2) 微分 $\left(\tan^{-1} x\right)'$ を計算せよ。

$y = \tan^{-1} x$ とする。$x = \tan y$ なので、これを y で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)' \\ &= \frac{(\sin y)' \cos y - \sin y (\cos y)'}{\cos^2 y} \\ &= \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \\ &= 1 + \tan^2 y \\ &= 1 + x^2.\end{aligned}$$

を得る。これの逆数をとって、

$$\left(\tan^{-1} x\right)' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{1+x^2}$$

となる。

(2-3) (2-1) 式の両辺を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分することにより、無限級数 s の値を求めよ。

$$\begin{gathered}\int_0^1 \mathrm{d}x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \\ \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \cdots\right]_0^1 = \left[\,\tan^{-1} x\,\right]_0^1, \\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}\end{gathered}$$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$

無限積 $s = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\theta}{2^n} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{16}\cdots$ の値を求めたい。

(3-1) 第 N 項までの部分積を $s_N = \prod_{n=1}^{N} \cos\frac{\theta}{2^n}$ とおく。

このとき、関係式

$$s_N \sin\frac{\theta}{2^N} = \frac{1}{2^N}\sin\theta$$

を示せ。

$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$ より、

$$\begin{aligned}
s_N \sin\frac{\theta}{2^N} &= \left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^N}\right)\sin\frac{\theta}{2^N} \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{N-1}}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2^N}\sin\frac{\theta}{2^N}\right) \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{N-1}}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{N-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{N-2}}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2^{N-1}}\sin\frac{\theta}{2^{N-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{N-2}}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{N-2}}\right) \\
&= \frac{1}{2^2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{N-3}}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2^{N-2}}\sin\frac{\theta}{2^{N-2}}\right) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{2^{N-1}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^N}\sin\theta
\end{aligned}$$

(3-2) 極限 $s = \lim_{N\to\infty} s_N$ をとることにより、無限積 s の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
s = \lim_{N\to\infty} s_N &= \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{2^N}}{\sin\frac{\theta}{2^N}}\sin\theta \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta}\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{\theta}{2^N}}{\sin\frac{\theta}{2^N}} \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta}.
\end{aligned}$$