数学II　第2回　積分の計算

2013 年 10 月 01 日

担当：佐藤 純

問題 1

以下の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int (x^2+2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2} + C$

(3) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

(4) $\displaystyle\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

(5) 省略したやり方：

$$\begin{aligned}\int (3x^2-2x)(x^3-x^2+1)^3\,\mathrm{d}x &= \int (x^3-x^2+1)'(x^3-x^2+1)^3\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}(x^3-x^2+1)^4 + C\end{aligned}$$

置換積分をきちんと書くと：
$t = x^3 - x^2 + 1$ とおく。$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 2x$ より、$\mathrm{d}t = (3x^2-2x)\mathrm{d}x$ なので、

$$\begin{aligned}\int (3x^2-2x)(x^3-x^2+1)^3\,\mathrm{d}x &= \int t^3\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{4}(x^3-x^2+1)^4 + C\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2+1}\,\mathrm{d}x$
省略したやり方：

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(x^3-x^2+1)'}{(x^3-x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \log|x^3-x^2+1| + C\end{aligned}$$

置換積分をきちんと書くと：
$t = x^3 - x^2 + 1$ とおく。$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 2x$ より、$\mathrm{d}t = (3x^2-2x)\mathrm{d}x$ なので、

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \log|t| + C \\ &= \log|x^3-x^2+1| + C\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int \cos x(\sin^2 x + \sin x + 1)\,\mathrm{d}x$

省略したやり方：

$$\begin{aligned}\int \cos x(\sin^2 x + \sin x + 1)\,\mathrm{d}x &= \int (\sin x)'(\sin^2 x + \sin x + 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \sin x + C\end{aligned}$$

置換積分をきちんと書くと：

$t = \sin x$ とおく。$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x$ より、$\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$ なので、

$$\begin{aligned}\int \cos x(\sin^2 x + \sin x + 1)\,\mathrm{d}x &= \int (t^2 + t + 1)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + C \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \sin x + C\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^3}{x}\,\mathrm{d}x &= \int (\log x)^3 (\log x)'\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}(\log x)^4 + C\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\log|\cos x| + C\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}\int \cos x e^{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int (\sin x)' e^{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= e^{\sin x} + C\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\int x \sin x\,\mathrm{d}x &= \int x(-\cos x)'\,\mathrm{d}x \\ &= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \int \cos x \mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\int x\log x\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2(\log x)'\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(\log x)'}{\log x}\,\mathrm{d}x \\ &= \log|\log x| + C\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}\int \log x\,\mathrm{d}x &= \int (x)'\log x\,\mathrm{d}x \\ &= x\log x - \int x(\log x)'\,\mathrm{d}x \\ &= x\log x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\log x - \int \mathrm{d}x \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ を部分分数分解する。

$\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ という形において、a と b を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} &= \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(a+b)x+(-a+b)}{x^2-1}\end{aligned}$$

となるので、恒等式 $1 = (a+b)x + (-a+b)$ において係数を比較して、

$$\begin{aligned}a+b&=0 \\ -a+b&=1\end{aligned}$$

を得る。これを解いて、$a=-1/2,\, b=1/2$ となるので結局、

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

がわかる。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)+C\\&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

(16) $\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

部分積分による方法：
$I=\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$ とおく。

$$\begin{aligned}I&=\int(e^x)'\sin x\,\mathrm{d}x\\&=e^x\sin x-\int e^x(\sin x)'\mathrm{d}x\\&=e^x\sin x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x\\&=e^x\sin x-\int(e^x)'\cos x\mathrm{d}x\\&=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x(\cos x)'\mathrm{d}x\\&=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\mathrm{d}x\\&=e^x\sin x-e^x\cos x-I\end{aligned}$$

より、$I=e^x\sin x-e^x\cos x-I$ を I について解いて、

$$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$$

を得る。
オイラーの公式による方法：

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x&=\int e^x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=\int e^xe^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\\&=\int e^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+\mathrm{i}} e^{(1+\mathrm{i})x} \\
&= \frac{1-\mathrm{i}}{2} e^{x} (\cos x + \mathrm{i} \sin x) \\
&= \frac{1}{2} e^{x} \left\{ (\sin x + \cos x) + \mathrm{i} (\sin x - \cos x) \right\}
\end{aligned}
$$

より、実部と虚部を比較して、

$$
\begin{aligned}
\int e^{x} \cos x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} e^{x} (\sin x + \cos x) \\
\int e^{x} \sin x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} e^{x} (\sin x - \cos x)
\end{aligned}
$$

を得る。

$\boxed{\textbf{問題 2}}$

以下の定積分を計算せよ。

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (-2x) e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (-x^2)' e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{1}{2} \right) \left[e^{-x^2} \right]_0^{\infty} \\
&= \left(-\frac{1}{2} \right) (0 - 1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x e^{-x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} x (-e^{-x})' \, \mathrm{d}x \\
&= \left[x(-e^{-x}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (x)' (-e^{-x}) \, \mathrm{d}x \\
&= - \left[x e^{-x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \, \mathrm{d}x \\
&= - \left[x e^{-x} \right]_0^{\infty} - \left[e^{-x} \right]_0^{\infty}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \\
&\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \\
&\lim_{x\to 0} xe^{-x} = 0 \times 1 = 0
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= -\left[xe^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty \\
&= (0-0) - (0-1) = 1
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big[\log|x| - \log|x+1|\Big]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^R \\
&= \left(\lim_{R\to\infty} \log\left|\frac{R}{R+1}\right|\right) - \log\frac{1}{1+1} \\
&= \log 1 - \log\frac{1}{2} \\
&= \log 2
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$

被積分関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ は、$x=1$ で発散することに注意。

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} \\
&= \lim_{\epsilon_1\to+0} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} + \lim_{\epsilon_2\to+0} \int_{1+\epsilon_2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} \\
&= \lim_{\epsilon_1\to+0} \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^{1-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to+0} \left[\frac{1}{1-x}\right]_{1+\epsilon_2}^2 \\
&= \lim_{\epsilon_1\to+0} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \lim_{\epsilon_2\to+0} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon_2}\right) \\
&= -2 + \lim_{\epsilon_1\to+0} \frac{1}{\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to+0} \frac{1}{\epsilon_2}
\end{aligned}
$$

これは収束しないので、この広義積分は収束しない。

(注意：$\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^2 = -2$ は間違い)