数学II　第1回　微分積分学の基本定理

2013年9月24日

担当：佐藤 純

問題1

区間 $0 \le x \le \pi$ における $f(x) = \sin x$ のグラフと、x 軸に囲まれた部分の面積 S を区分求積法で計算する。

区間 $0 \le x \le \pi$ を N 分割し、$\Delta x = \dfrac{\pi}{N},\ \ x_n = n\Delta x = \dfrac{\pi}{N}n\ (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ とする。

短冊の面積の和を $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$ とすれば、$S = \displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N$ となる。

(1-1) オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を使って、$\sin\theta = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ を示せ。

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \\
e^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta
\end{aligned}
$$

より、両辺を引き算して、

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) - (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \\
&= 2\mathrm{i}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

両辺を $2\mathrm{i}$ で割って、与式を得る。

(1-2) 上で示した式と等比級数の和の公式を使って、$S_N = \dfrac{\pi}{N}\dfrac{\sin\frac{\pi}{N}}{1-\cos\frac{\pi}{N}}$ を示せ。

$$
\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right)\frac{\pi}{N} \\
&= \frac{\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} - e^{-\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\pi}{2\mathrm{i}N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi}\right).
\end{aligned}
$$

ここで、この等比級数を T とすると、

$$
\begin{aligned}
T &= 1 + e^{\mathrm{i}\frac{1}{N}\pi} + e^{\mathrm{i}\frac{2}{N}\pi} + \cdots + e^{\mathrm{i}\frac{N-1}{N}\pi} \\
Te^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}} &= e^{\mathrm{i}\frac{1}{N}\pi} + e^{\mathrm{i}\frac{2}{N}\pi} + \cdots + e^{\mathrm{i}\frac{N-1}{N}\pi} + e^{\mathrm{i}\frac{N}{N}\pi}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$e^{\mathrm{i}\frac{N}{N}\pi} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ である。上の 2 式を辺々引き算することによって、

$$(1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})T = 1 - (-1) = 2$$

を得る。結局、この等比級数は

$$T = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} = \frac{2}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}$$

となる。全く同様に、

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} = \frac{2}{1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}$$

を得る。

以上をまとめて、

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{\pi}{2\mathrm{i}N}\left(\frac{2}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}} - \frac{2}{1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\left(\frac{1}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}} - \frac{1}{1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\frac{(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}) - (1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})}{(1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})} \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}{2 - (e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})} \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\frac{2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{N}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{N}} \\
&= \frac{\pi}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{1 - \cos\frac{\pi}{N}}
\end{aligned}$$

を得る。

(1-3) 極限 $N \to \infty$ をとることによって、S の値を求めよ。

$\epsilon = \dfrac{\pi}{N}$ とおくと、$N \to \infty$ で $\epsilon \to 0$ なので、

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{N\to\infty} S_N \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{1 - \cos\frac{\pi}{N}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon\sin\epsilon}{1 - \cos\epsilon}
\end{aligned}$$

を得る。これは $0/0$ の不定形なので、ロピタルの定理を (繰り返し) 使うと、

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon\sin\epsilon}{1 - \cos\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\epsilon\sin\epsilon)'}{(1 - \cos\epsilon)'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sin\epsilon + \epsilon\cos\epsilon}{\sin\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(\sin\epsilon + \epsilon\cos\epsilon)'}{(\sin\epsilon)'} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\cos\epsilon + \cos\epsilon - \epsilon\sin\epsilon}{\cos\epsilon} \\
&= \frac{1+1-0}{1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

を得る。

(1-4) $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ。

$F(x) = -\cos x$

(1-5) 微分積分学の基本定理 $S = F(\pi) - F(0)$ が成り立っていることを確認せよ。

$F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$ より、確かに $S = F(\pi) - F(0) = 2$ が成り立っている。