数学II　第1回　微分積分学の基本定理

2013 年 9 月 24 日

担当：佐藤 純

問題 1

区間 $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x) = \sin x$ のグラフと、x 軸に囲まれた部分の面積 S を区分求積法で計算する。

区間 $0 \leq x \leq \pi$ を N 分割し、$\Delta x = \dfrac{\pi}{N},\ \ x_n = n\Delta x = \dfrac{\pi}{N} n\ (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ とする。

短冊の面積の和を $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$ とすれば、$S = \displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N$ となる。

(1-1) オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を使って、$\sin\theta = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ を示せ。

(1-2) 上で示した式と等比級数の和の公式を使って、$S_N = \dfrac{\pi}{N}\dfrac{\sin\frac{\pi}{N}}{1-\cos\frac{\pi}{N}}$ を示せ。

(1-3) 極限 $N \to \infty$ をとることによって、S の値を求めよ。

(1-4) $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ。

(1-5) 微分積分学の基本定理 $S = F(\pi) - F(0)$ が成り立っていることを確認せよ。