一般力学演習　期末試験

2013 年 7 月 22 日　　担当：佐藤 純

問題 1

半径 r, 速さ v で質点が等速円運動している。

(1-1) 質点の加速度ベクトルは、常に中心を向いていて、その大きさは $\dfrac{v^2}{r}$ であることを示せ。

質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = r(\cos\theta, \sin\theta)$ とすると、
速度ベクトルは、$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = r(-\sin\theta\dot{\theta}, \cos\theta\dot{\theta}) = r\omega(-\sin\theta, \cos\theta)$ となる。
ただし、角速度を $\omega = \dot{\theta}$ とした。
加速度ベクトルは、$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = r\omega(-\cos\theta\dot{\theta}, -\sin\theta\dot{\theta}) = -r\omega^2(\cos\theta, \sin\theta)$ となる。
$\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$ なので、加速度ベクトルは常に中心を向いている。
また、$v = |\boldsymbol{v}| = r\omega$, $a = |\boldsymbol{a}| = r\omega^2$ とすると、$a = \dfrac{v^2}{r}$ である。

(1-2) 等速運動なのに、加速度がゼロでないのはなぜか？

速度ベクトルの大きさは一定だが、方向が時間変化するため。

問題 2

質量 m のボールを地上の高い所に持っていき、そっと手を離して落下させた。
空気抵抗は無視する。

(2-1) ボールの運動方程式を立てよ。

鉛直上向きに z 軸を取ると、運動方程式は、$m\ddot{z} = -mg$ となる。

(2-2) 運動方程式の両辺に速度 v をかけて一回積分することにより、エネルギー保存則を示せ。

ボールの速度を $v = \dot{z}$ とすると、運動方程式は、$m\dot{v} = -mg$ となる。
両辺に v をかけて時間積分すると、

$$
\begin{aligned}
&\int m\dot{v}v\mathrm{d}t = -\int mgv\mathrm{d}t,\\
&\int mv\frac{dv}{dt}\mathrm{d}t = -\int mg\frac{dz}{dt}\mathrm{d}t,\\
&\int mv\mathrm{d}v + \int mg\mathrm{d}z = 0,\\
&\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{定数}
\end{aligned}
$$

となり、エネルギー保存則を得る。

問題 3

質量 m のボールを地上の高い所に持っていき、そっと手を離して落下させた。
ボールが落下する際、速度に比例した空気抵抗が働くとする。

(3-1) ボールの運動方程式を立てよ。

鉛直下向きに z 軸を取ると、運動方程式は、$m\ddot{z} = mg - \gamma v$ となる。

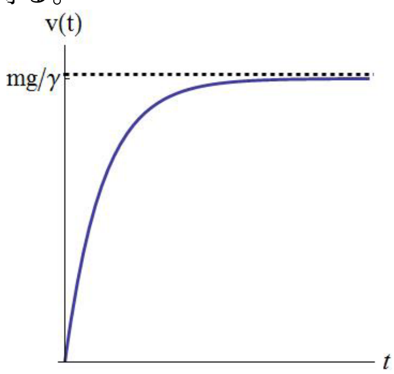
(3-2) ボールの速度 v を、時間の関数として決定し、グラフを描け。

$$
\begin{aligned}
& m\dot{v} = mg - \gamma v, \\
& \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right), \\
& \int \frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{mg}{\gamma}} = -\int \frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t, \\
& \log\left|v - \frac{mg}{\gamma}\right| = -\frac{\gamma}{m}t + C, \\
& v - \frac{mg}{\gamma} = Be^{-\frac{\gamma}{m}t}
\end{aligned}
$$

ここで、B, C は積分定数である。$t = 0$ で $v = 0$ だから、$B = -\dfrac{mg}{\gamma}$ なので、

$$
v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)
$$

を得る。



(3-3) 以下の記述について、正しいものを全て選べ。

(a) ボールを離した瞬間にボールに働いている力は、重力だけである。
(b) ボールを離した瞬間のボールの加速度はゼロである。
(c) 時間が十分に経つと、ボールの速さは一定値に収束する。
(d) ボールは最初は加速するが、空気抵抗がだんだん大きくなってやがて減速する。
(e) ボールは常に加速し続け、減速することはない。

(a), (c), (e)

$\boxed{\textbf{問題 4}}$

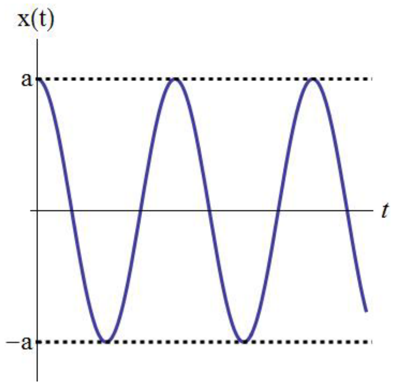
バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け、机の上に置いて、他端を固定する。
おもりを引っ張ってバネを a だけ伸ばし、そっと手を離す。
おもりと机の摩擦は無視する。

(4-1) おもりの運動方程式を立てよ。

$$m\ddot{x} = -kx$$

(4-2) おもりの位置を時間の関数として決定し、グラフを描け。

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とすると、$\ddot{x} = -\omega^2 x$ となり、
一般解は $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ となる。
ここで、A, B は積分定数である。
$t = 0$ で $x = a,\ v = 0$ より、$A = a,\ B = 0$ なので、
$x(t) = a\cos\omega t$ を得る。



$\boxed{\text{問題 5}}$

バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け、机の上に置いて、他端を固定する。
おもりを引っ張ってバネを a だけ伸ばし、そっと手を離す。
おもりと机にはおもりの速度に比例した摩擦力が働くとするが、摩擦は十分に小さいとする。

(5-1) おもりの運動方程式を立てよ。

$m\ddot{x} = -kx - \gamma v$

(5-2) おもりの位置を時間の関数として決定し、グラフを描け。

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \beta = \dfrac{\gamma}{2m}$ とすると、$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0$ となる。

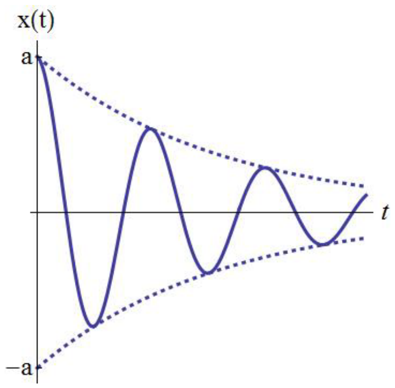
ここで、指数関数解 $x = e^{\lambda t}$ を仮定して上式に代入すると、
$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$ をとなる。

この λ に対する 2 次方程式を解くと、
$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$ を得る。

ここで、摩擦は十分小さいとして $\beta < \omega$ を仮定し、$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ とおくと、
$\lambda = -\beta \pm \mathrm{i}\omega_0$ となる。

したがって、一般解は $x(t) = Ae^{(-\beta+\mathrm{i}\omega_0)t} + Be^{(-\beta-\mathrm{i}\omega_0)t} = e^{-\beta t}\left(C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t\right)$ となる。
ここで、A, B, C, D は積分定数である。

$t = 0$ で $x = a, v = 0$ より、$C = a, D = \dfrac{\beta a}{\omega_0}$ なので、
$x(t) = ae^{-\beta t}\left(\cos\omega_0 t + \dfrac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$ を得る。



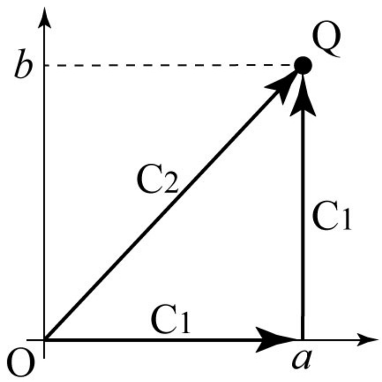
$\boxed{\textbf{問題 6}}$

2 次元 xy 平面内を質点が運動している。場所 (x, y) における質点のポテンシャルエネルギー $U(x, y)$ は、$U(x, y) = -\dfrac{1}{2}x^2y^2$ で与えられるとする。

(6-1) 場所 (x, y) において質点が受ける力 $\boldsymbol{F}(x, y)$ を求めよ。

$$\boldsymbol{F}(x,y) = -\nabla U(x,y) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (xy^2, x^2y). \tag{1}$$

(6-2) 質点が原点 O:$(0, 0)$ から点 Q:(a, b) まで、図に示す二つの経路 C_1, C_2 に沿って移動した。その際、それぞれの経路の場合にこの力が質点に為した仕事 W_1, W_2 を計算せよ。



$\boxed{C_1}$

$$W_1 = \int_0^a x0^2\mathrm{d}x + \int_0^b a^2y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}a^2b^2,$$

$\boxed{C_2}$

$(x, y) = (at, bt)$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}t(a, b), \\ \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (at(bt)^2)a\mathrm{d}t + ((at)^2bt)b\mathrm{d}t = 2a^2b^2t^3\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$$W_2 = \int_0^1 2a^2b^2t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a^2b^2,$$

(6-3) 上で求めた仕事はどちらも、2 地点 O, Q のポテンシャルエネルギーの差に等しいことを示せ。

$$W_1 = W_2 = U(0,0) - U(a,b) = \frac{1}{2}a^2b^2.$$

問題 7

(7-1) 長さ ℓ, 質量 m の棒の、中心を通って棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 m \frac{\mathrm{d}x}{\ell} = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

(7-2) 半径 a, 高さ ℓ, 質量 m の直円柱の、中心軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

$$I = \int_0^a r^2 m \frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\pi a^2} = \frac{2m}{a^2} \int_0^a r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2} m a^2.$$

(7-3) 半径 a, 質量 m の球の、中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

厚みのない半径 a の球殻の慣性モーメントは、

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \mathrm{d}m, \quad I_y = \int (z^2 + x^2) \mathrm{d}m, \quad I_z = \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m.$$

$I = I_x = I_y = I_z$ より、

$$\begin{aligned} 3I &= I_x + I_y + I_z = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}m = 2ma^2, \\ I &= \frac{2}{3} m a^2. \end{aligned} \tag{2}$$

これを足し合わせれば球の慣性モーメントが求まる：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{2}{3} r^2 m \frac{4\pi r^2 \mathrm{d}r}{\frac{4}{3}\pi a^3} \\ &= \frac{2m}{a^3} \int_0^a r^4 \mathrm{d}r = \frac{2}{5} m a^2. \end{aligned} \tag{3}$$

(7-4) 質量と半径が等しい一様な円柱と球を斜面を転がすとき、どちらが速く落ちるか？

球の慣性モーメントの方が小さいので、球の方が速く転がり落ちる。

問題 8

質量 m の剛体を考える。重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 重力加速度を方向も考慮して $\boldsymbol{g}$ とする。

重力がこの剛体におよぼす力のモーメントは、質量 m の質点が位置 $\boldsymbol{r}$ にあるときの重力のモーメントに等しいことを示せ。

剛体を N 個の微小部分に分け、i 番目の微小部分の位置を $\boldsymbol{r}_i$, 質量を m_i とする。

重力がこの剛体におよぼす力のモーメントの合計は、

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{g}) = \sum_{i=1}^{N} (m_i \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \right) \times \boldsymbol{g} = (m\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{g}).$$

これは、重心の一点に剛体の全ての質量が集中しているとみなした場合の、重力のモーメントに等しい。