一般力学演習　第１回　運動のベクトル表示

2013年4月8日

担当：佐藤 純

問題１

２次元平面内を等速円運動する物体を考える。円運動の半径を ρ, 角速度を ω とする。

(1-1) 原点 $(0,0)$ を中心に左回りに回転するとし、時刻 $t=0$ において物体は $(\rho,0)$ にあるとする。時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$, 加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ を求めよ。

(1-2) 位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることを示せ。

(1-3) 加速度ベクトルは、常に物体から原点に向かう向きにあることを示せ。

(1-4) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{v}|^2$ を示せ。

問題２

２次元極座標を考える。基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ とする。

(2-1) $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を用いて表せ。

(2-2) 基本ベクトルの時間微分 $\dot{\boldsymbol{e}}_r$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$ を計算し、それぞれ $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_r$ に比例していることを示せ。。

(2-3) 物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。物体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ は、極座標を用いると

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1}$$

と書けることを示せ。

(2-4) 同様に、物体の加速度ベクトル $\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}$ は、極座標を用いると

$$\boldsymbol{a}=\{\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2\}\boldsymbol{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \tag{2}$$

と書けることを示せ。

(2-5) 角速度 ω の等速円運動の場合に具体的に $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ を計算し、問題 (1-2)～(1-4) の事実を確認せよ。