数学演習I　中間試験

2013 年 6 月 5 日

担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ (5+5=10 点)

以下の式を、$A\sin(x+\alpha)$ の形に表せ。

(1-1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(1-2) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ (3+3+4=10 点)

次の極限値を求めよ。ただし、公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使ってよい。

(2-1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{2}{3}$

(2-2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin x}=4$

(2-3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ (5+5=10 点)

実数 x に対する以下の方程式を解け。

(3-1) $\log_5(x-3)+\log_5(x+1)=1$

$(x-3)(x+1)=5$

$x=-2,4$

$x>3$ より、$x=4.$

(3-2) $4^x-2^x=56$

$y=2^x$ とおくと、$y^2-y=56.$

$y=-7,8$

$y>0$ より、$y=8.$

$x=3.$

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ (3+3+4=10 点)

以下の値を求めよ。

(4-1) $9^{\frac{3}{2}} \times 8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{27}{4}$

(4-2) $\log_{10} 0.01 = -2$

(4-3) $\log_2 7 - \log_2 56 = \log_2 \dfrac{7}{56} = -3$

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ (3+3+4=10 点)

$\alpha = 1 + 3\mathrm{i}$, $\beta = 2 - \mathrm{i}$ とする。以下の式を、$x + \mathrm{i}y$, (x, y は実数) の形に計算せよ。

(5-1) $\alpha + \beta = 3 + 2\mathrm{i}$

(5-2) $\alpha\beta = 5 + 5\mathrm{i}$

(5-3) $\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}\mathrm{i}$

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ (3+3+4=10 点)

以下の複素数の絶対値を求めよ。

(6-1) $|3 + 4\mathrm{i}| = 5$

(6-2) $|-2\mathrm{i}| = 2$

(6-3) $|-1 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ (3+3+4=10 点)

以下の複素数を極形式で表せ。

(7-1) $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

(7-2) $1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

(7-3) $-\sqrt{6} + \sqrt{2}\mathrm{i} = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}$

$\boxed{\textbf{問題 8}}$ (10 点)

$\alpha = e^{\mathrm{i}\pi/3},\ \beta = e^{\mathrm{i}\pi/4}$ とする。α/β を計算することにより、$\cos\dfrac{\pi}{12}$ および $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を計算せよ。

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12} &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\end{aligned} \tag{1}$$

実物と虚部を比較して、$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を得る。

$\boxed{\textbf{問題 9}}$ (5+5=10 点)

(9-1) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -1$ のとき、$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ を計算せよ。

$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - 7\vec{a}\cdot\vec{b} = 49.$

(9-2) $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ を証明せよ。

$(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b}) = 6\vec{a}\times\vec{a} - 4\vec{b}\times\vec{a} - 3\vec{a}\times\vec{b} + 2\vec{b}\times\vec{b} = 0 + 4\vec{a}\times\vec{b} - 3\vec{a}\times\vec{b} + 0 = \vec{a}\times\vec{b}.$

$\boxed{\textbf{問題 10}}$ (3+3+4=10 点)

3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が、成分表示で $\vec{a} = (1, 2, -1),\ \vec{b} = (-2, 1, 2)$ と与えられているとする。

(10-1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算せよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2 + 2 - 2 = -2$

(10-2) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

$|\vec{a}| = \sqrt{6},\ |\vec{b}| = 3$ より、$\cos\theta = \dfrac{-2}{3\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{9}.$

(10-3) 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ。

$\vec{a}\times\vec{b} = (4+1, 2-2, 1+4) = (5, 0, 5).$