数学I　中間試験

2013年6月5日

担当：佐藤 純

問題1 ⋆　(a)〜(d) にあてはまる式を答えよ。(1+2+3+4=10点)

$\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めたい。$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は知っているので、半角の公式を使う。

まず、加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ において $\alpha=\beta$ として、$\boxed{\text{(a)}}$ を得る。

ここで、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を使って $\cos^2\alpha$ を消去して、$\boxed{\text{(b)}}$ を得る。

これを $\sin^2\alpha$ について解くと、$\sin^2\alpha=\boxed{\text{(c)}}$ を得る。

ここで $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ として、$\sin\dfrac{\pi}{8}>0$ に注意すれば、$\sin\dfrac{\pi}{8}=\boxed{\text{(d)}}$ を得る。

(a) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(b) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

(c) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

(d) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

問題2 ⋆⋆⋆ (10点)

$0\leq x\leq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき、$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin x$ の最小値と最大値を求めよ。

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x&=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sin x\\&=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)\\&=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}\tag{1}$$

$0\leq x\leq\dfrac{3}{2}\pi$ より、$\dfrac{\pi}{6}\leq x+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{5}{3}\pi$ なので、

$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ は最大値 1 をとり、

$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$ のとき $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ は最小値 -1 をとる。

したがって、$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin x$ は最大値 $\sqrt{3}$ をとり、

$x=\dfrac{4\pi}{3}$ のとき $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ は最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。

問題 3 ⋆⋆ (10 点)

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される。

$f(x) = \sin x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

ただし、公式 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ および $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ を使ってよい。

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \qquad (2)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\left(\lim_{h \to 0} \sin h\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h + 1}\right) \\ &= -0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

より、

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (4)$$

問題 4 ⋆⋆ (10 点)

2^{100} は何桁の数か？　ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$ を使ってよい。

2^{100} が n 桁の数であるとすると、$10^{n-1} < 2^{100} < 10^n$ が成り立つ。これの対数を取ると、$n-1 < \log_{10} 2^{100} < n$ であり、$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 30.1\cdots$ なので、$n = 31$ を得る。したがって、2^{100} は 31 桁である。

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $\star$ (3+3+4=10 点)

$\alpha = 2 - 3\mathrm{i}$, $\beta = 3 + \mathrm{i}$ とする。以下の式を、$x + \mathrm{i}y$, (x, y は実数) の形に計算せよ。

(5-1) $2\mathrm{i}\alpha - 3\beta = -3 + \mathrm{i}$

(5-2) $\alpha\beta = 9 - 7\mathrm{i}$

(5-3) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{3}{10} - \dfrac{11}{10}\mathrm{i}$

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ $\star$ (2+2+3+3=10 点)

以下の複素数の絶対値を求めよ。

(6-1) $2 + 3\mathrm{i}$

$|2 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{13}$

(6-2) $-5\mathrm{i}$

$|-5\mathrm{i}| = 5$

(6-3) $(1 - \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})(4 - 3\mathrm{i})$

$|(1 - \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})(4 - 3\mathrm{i})| = |1 - \mathrm{i}||1 + 2\mathrm{i}||4 - 3\mathrm{i}| = \sqrt{2}\sqrt{5}5 = 5\sqrt{10}$

(6-4) $\dfrac{(1 - \mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})(7 - 5\mathrm{i})(3 - 8\mathrm{i})}{(7 + 5\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(3 + 8\mathrm{i})}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(1 - \mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})(7 - 5\mathrm{i})(3 - 8\mathrm{i})}{(7 + 5\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(3 + 8\mathrm{i})}\right| &= \frac{|1 - \mathrm{i}||3 + 4\mathrm{i}||7 - 5\mathrm{i}||3 - 8\mathrm{i}|}{|7 + 5\mathrm{i}||2 - \mathrm{i}||3 + 8\mathrm{i}|} \\
&= \frac{|1 - \mathrm{i}||3 + 4\mathrm{i}|}{|2 - \mathrm{i}|} \\
&= \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{10}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ $\star\star$ (10 点)

$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{6}\,\mathrm{i}$, $\beta = 1 - \mathrm{i}$ とするとき、$\dfrac{\alpha^6}{\beta^8}$ を計算せよ。

$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $\beta = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ より、

$\alpha^6 = 2^9 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 6} = 2^9 e^{2\pi\mathrm{i}} = 2^9$,

$\beta^8 = 2^4 e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\times 8} = 2^4 e^{-2\pi\mathrm{i}} = 2^4$ より、$\dfrac{\alpha^6}{\beta^8} = 2^5 = 32.$

$\boxed{\textbf{問題 8}}$ ⋆⋆⋆ (10 点)

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ を使って、三倍角の公式

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned}
\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x &= e^{3\mathrm{i}x} \\
&= \left(e^{\mathrm{i}x}\right)^3 \\
&= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3\mathrm{i}\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - \mathrm{i}\sin^3 x \\
&= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + \mathrm{i}(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x) \\
&= (4\cos^3 x - 3\cos x) + \mathrm{i}(3\sin x - 4\sin^3 x) \qquad (5)
\end{aligned}$$

実部と虚部を比べて与式を得る。

$\boxed{\textbf{問題 9}}$ ⋆ (5+5=10 点)

(9-1) 2 つの直交するベクトルの内積がゼロになるのはなぜか？

１．射影がゼロになるので。
２．$\cos\pi/2 = 0$ なので。

(9-2) 2 つの平行なベクトルの外積がゼロになるのはなぜか？

１．二つのベクトルが作る三角形の面積がゼロになるので。
２．$\sin 0 = \sin\pi = 0$ なので。

１の図形的な説明でも、２の数式による説明でも、どちらでもよい。

$\boxed{\textbf{問題 10}}$ ⋆ (2+3+2+3=10 点)

3 次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を, O:$(0,0,0)$, A:$(2,-1,1)$, B:$(-3,0,1)$ とする。

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。

(10-1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算せよ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6 + 0 + 1 = -5$$

(10-2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

$|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$ より、$\cos\theta = \dfrac{-5}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = -\sqrt{\dfrac{5}{12}}.$

(10-3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ を計算せよ。

$$\vec{c} = (-1 - 0, -3 - 2, 0 - 3) = (-1, -5, -3)$$

(10-4) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ。

求める平面上の任意の点を P= (x, y, z) とすると、$\vec{c}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は常に直交するので、$\vec{c} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -x - 5y - 3z = 0$ が成り立つ。したがって、求める平面の方程式は、

$$x + 5y + 3z = 0$$

となる。