数学I　中間試験

2013年6月5日

担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ $\star$　(a)〜(d) にあてはまる式を答えよ。 (1+2+3+4=10 点)

$\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めたい。$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は知っているので、半角の公式を使う。

まず、加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ において $\alpha = \beta$ として、$\boxed{\quad \text{(a)} \quad}$ を得る。

ここで、$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を使って $\cos^2\alpha$ を消去して、$\boxed{\quad \text{(b)} \quad}$ を得る。

これを $\sin^2\alpha$ について解くと、$\sin^2\alpha = \boxed{\quad \text{(c)} \quad}$ を得る。

ここで $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ として、$\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$ に注意すれば、$\sin\dfrac{\pi}{8} = \boxed{\quad \text{(d)} \quad}$ を得る。

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ $\star\star\star$ (10 点)

$0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき、$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin x$ の最小値と最大値を求めよ。

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ $\star\star$ (10 点)

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される。

$f(x) = \sin x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

ただし、公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ および $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ を使ってよい。

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ $\star\star$ (10 点)

2^{100} は何桁の数か？　ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$ を使ってよい。

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $\star$ (3+3+4=10 点)

$\alpha = 2 - 3\mathrm{i}$, $\beta = 3 + \mathrm{i}$ とする。以下の式を、$x + \mathrm{i}y$, (x, y は実数) の形に計算せよ。

(5-1) $2\mathrm{i}\alpha - 3\beta$

(5-2) $\alpha\beta$

(5-3) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ $\star$ (2+2+3+3=10 点)

以下の複素数の絶対値を求めよ。

(6-1) $2+3\mathrm{i}$

(6-2) $-5\mathrm{i}$

(6-3) $(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$

(6-4) $\dfrac{(1-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})(7-5\mathrm{i})(3-8\mathrm{i})}{(7+5\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3+8\mathrm{i})}$

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ $\star\star$ (10 点)

$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{6}\,\mathrm{i},\ \ \beta=1-\mathrm{i}$ とするとき、$\dfrac{\alpha^6}{\beta^8}$ を計算せよ。

$\boxed{\textbf{問題 8}}$ $\star\star\star$ (10 点)

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ を使って、三倍角の公式

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

を証明せよ。

$\boxed{\textbf{問題 9}}$ $\star$ (5+5=10 点)

(9-1) 2 つの直交するベクトルの内積がゼロになるのはなぜか？

(9-2) 2 つの平行なベクトルの外積がゼロになるのはなぜか？

$\boxed{\textbf{問題 10}}$ $\star$ (2+3+2+3=10 点)

3 次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を, O:$(0,0,0)$, A:$(2,-1,1)$, B:$(-3,0,1)$ とする。
ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。

(10-1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算せよ。

(10-2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

(10-3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ。

(10-4) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ。