数学Ⅰ　期末試験

2013年7月18日　　担当：佐藤 純

1. 以下で与えられた関数 y を x で微分し、y' を求めよ。
6点 ×7=42点

(1) $y=(x^2+x+1)^6$

$$\begin{aligned} y' &= 6(x^2+x+1)^5 \times (x^2+x+1)' \\ &= 6(2x+1)(x^2+x+1)^5 \end{aligned}$$

(2) $y=\sqrt{x^2+1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times (x^2+1)' \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

(3) $y=\sin^2 x$

$$\begin{aligned} y' &= 2\sin x \times (\sin x)' \\ &= 2\sin x \times \cos x \\ &= \sin 2x \end{aligned}$$

(4) $y=e^{\sin x}$

$$\begin{aligned} y' &= e^{\sin x} \times (\sin x)' \\ &= \cos x e^{\sin x} \end{aligned}$$

(5) $y=x^x$

$$y = e^{\log x^x} = e^{x\log x}$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{x\log x} \times (x\log x)' \\ &= e^{x\log x}(1+\log x) \end{aligned}$$

(6) $y=\sin^{-1} x$

$$\begin{aligned} & x = \sin y, \\ & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}, \\ & y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

(7) $y=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \times \left(\tan\frac{x}{2}\right)' \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \times \left(\frac{x}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

2. 以下の極限値を求めよ。　6点 ×3=18点

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{1} = \sqrt{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} & y = x^{\frac{1}{x}}, \\ & z = \log y = \log x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log x = \frac{\log x}{x}, \\ & \lim_{x\to\infty} z = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0, \\ & \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^z = e^0 = 1. \end{aligned}$$

3. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。　10点

$\sin^{-1} x = a$ とすると、$\sin a = x$.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos a + \sin\frac{\pi}{2}\sin a \\ &= 0\times\cos a + 1\times\sin a \\ &= \sin a \\ &= x \end{aligned}$$

より、$x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ なので、
$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - a = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ となり、与式を得る。

4. $\sqrt{2}$ の値をできるだけ正確に知りたい。　5点 ×3=15点

(1) $\sqrt{2} = 1.4\times\dfrac{1}{\sqrt{1-0.02}}$ を示せ。

$$\begin{aligned} 1.4\times\frac{1}{\sqrt{1-0.02}} &= \frac{7}{5}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{98}{100}}} \\ &= \frac{7}{5}\times\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{98}} \\ &= \frac{7}{5}\times\frac{10}{7\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\cdots$ と展開できることを示せ。

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ とすると、
$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\times(1-x)' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$,
$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}\times(1-x)' = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$ より、
$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{3}{4}$ なので、
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$.

(3) $\sqrt{2}$ の値をできるだけ正確に求めよ。

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = 1.4\times\frac{1}{\sqrt{1-0.02}} &\simeq 1.4\times\left(1+\frac{1}{2}\times 0.02+\frac{3}{8}\times 0.02^2\right) \\ &= 1.4\times(1+0.01+0.00015) \\ &= 1.4\times 1.01015 \\ &= 1.41421 \end{aligned}$$

5. e^π と π^e の大小関係を調べたい。　10 点+5 点=15 点

ただし、$e = 2.71\cdots$, $\pi = 3.14\cdots$ である。

(1) $f(x) = x - e\log x\ \ (x > 0)$ のグラフを描き、$f(\pi) > 0$ を示せ。

10 点

$$\lim_{x\to+0} f(x) = +0 - e \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - e\frac{\log x}{x}\right)$$

ここで、

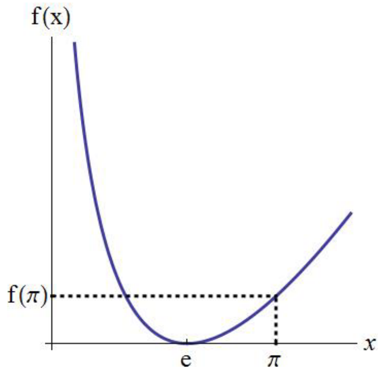
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

なので、

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (1-0) = +\infty$$

$f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x}$ より、増減表を書くと、

x	0	$\sim$	e	$\sim$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$f(e) = 0$, $x > e$ で $f'(x) > 0$ より、$x > e$ で $f(x) > 0$ である。

したがって、$\pi > e$ より、$f(\pi) > 0$.

(2) e^π と π^e の大小関係を決定せよ。

5 点

$f(\pi) = \pi - e\log\pi > 0$ より、

$\pi > e\log\pi$ である。

$\pi = \log e^\pi$, $e\log\pi = \log\pi^e$ より、

$\log e^\pi > \log\pi^e$ である。

$\log x$ は $x > 0$ で単調増加関数だから、

$\log e^\pi > \log\pi^e \Longleftrightarrow e^\pi > \pi^e$ である。