数学演習 I　第 8 回　ベクトルの外積

2013 年 5 月 29 日

担当：佐藤 純

問題 1

3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える。以下の量は、スカラーかベクトルか、答えよ。

(1-1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$　スカラー

(1-2) $\vec{a} \times \vec{b}$　ベクトル

(1-3) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$　ベクトル

(1-4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$　スカラー

(1-5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$　ベクトル

問題 2

3 次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を, O:$(0, 0, 0)$, A:$(1, -3, 2)$, B:$(-1, 1, -2)$ とする。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。

(2-1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ を計算せよ。

$$\begin{aligned} \vec{c} &= ((-3) \times (-2) - 2 \times 1,\ 2 \times (-1) - 1 \times (-2),\ 1 \times 1 - (-3) \times (-1)) \\ &= (6 - 2, -2 + 2, 1 - 3) = (4, 0, -2) \end{aligned} \tag{1}$$

(2-2) $\vec{c}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ と直交することを示せ。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= 1 \times 4 + (-3) \times 0 + 2 \times (-2) = 0, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= (-1) \times 4 + 1 \times 0 + (-2) \times (-2) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(2-3) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ。

求める平面上の任意の点を Q= (x, y, z) とすると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は常にベクトル $\vec{c}$ に直交するので、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{c} = 4x - 2z = 0.$ よって、求める平面の方程式は、$2x - z = 0$ となる。

(2-4) 三角形 OAB の面積を求めよ。

三角形 OAB の面積 $S = \dfrac{1}{2}|\vec{c}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$

問題 3

3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える。ベクトルの大きさを、$a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$ とする。以下の式を証明せよ。

(3-1) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2$

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned} |\vec{a}\times\vec{b}| &= ab\sin\theta, \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= ab\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

なので、

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = a^2b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = a^2b^2 \tag{4}$$

となる。

(3-2) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{b}\times\vec{a}$

$$\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{a} - \vec{b}\times\vec{b} \\ &= 0 + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{a} - 0 \\ &= 2\vec{b}\times\vec{a} \end{aligned} \tag{5}$$

(3-3) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$

$$\begin{aligned} (\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c}) &= \vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} \\ &= \vec{a}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{a} - 0 + \vec{b}\times\vec{c} \\ &= \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} \end{aligned} \tag{6}$$

(3-4) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3), \tag{7}$$

とする。また、

$$\vec{d} = \vec{b}\times\vec{c}, \quad \vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \tag{8}$$

とすると、

$$\begin{aligned} d_1 &= b_2c_3 - b_3c_2, \\ d_2 &= b_3c_1 - b_1c_3, \\ d_3 &= b_1c_2 - b_2c_1 \end{aligned} \tag{9}$$

なので、

$$\begin{aligned} \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{a}\times\vec{d} \\ &= (a_2d_3 - a_3d_2,\ a_3d_1 - a_1d_3,\ a_1d_2 - a_2d_1) \\ &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), \\ &\qquad a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), \\ &\qquad a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_1c_2)) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= (b_1,b_2,b_3)(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-(c_1,c_2,c_3)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\ &= (b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3),\\ &\quad b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3),\\ &\quad b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3))\\ &= (a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3),\\ &\quad a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1),\\ &\quad a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_1c_2)) \end{aligned} \tag{11}$$

なので、左辺 = 右辺となり、与式を得る。

$\boxed{\textbf{問題 4}}$

任意の 3 次元ベクトル $\vec{a}$ は、適当な単位ベクトル $\vec{n}$ を使って, $\vec{a}=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$ と表せることを示せ。

前問の結果を使うと、

$$\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})=\vec{a}(\vec{n}\cdot\vec{n})-\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{a})=\vec{a}|\vec{n}|^2-\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}) \tag{12}$$

となる。ここで、$\vec{n}$ は単位ベクトルなので $|\vec{n}|=1$ であることを使うと、

$$\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})=\vec{a}-\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}) \tag{13}$$

となる。したがって、

$$\text{右辺}=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{a}-\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})=\vec{a}=\text{左辺} \tag{14}$$

を得る。