数学演習I　第6回　複素数の極形式

2013年5月15日

担当：佐藤 純

問題1

以下の複素数を複素平面上に図示し、極形式で表せ。

(1-1) $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

(1-2) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{3})\right)=2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

(1-3) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

(1-4) $-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

(1-5) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

問題2

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ を使って、以下の式を証明せよ。

(2-1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}&=e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta}=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}\tag{1}$$

一方、$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$$\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\tag{2}$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

(2-2) $\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$

$$\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=e^{\mathrm{i}nx}=\left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n\tag{3}$$

問題3

$\alpha=1+\sqrt{3}\mathrm{i},\ \beta=1+\mathrm{i}$ とするとき、以下の値を求めよ。

(3-1) α^6

$\alpha=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ より、

$$\alpha^6=(2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^6=2^6(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^6=2^6e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 6}=64e^{2\pi\mathrm{i}}=64\tag{4}$$

(3-2) β^8

$\beta=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ より、

$$\beta^8=(\sqrt{2})^8(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^8=2^4(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^8=2^4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\times 8}=16e^{2\pi\mathrm{i}}=16 \tag{5}$$

(3-3) $1+\alpha/2+\alpha^2/4+\alpha^3/8+\alpha^4/16+\alpha^5/32$

$$x=1+\alpha/2+\alpha^2/4+\alpha^3/8+\alpha^4/16+\alpha^5/32 \tag{6}$$

とすると、

$$\frac{\alpha}{2}x=\alpha/2+\alpha^2/4+\alpha^3/8+\alpha^4/16+\alpha^5/32+\alpha^6/64 \tag{7}$$

なので、辺々引き算すると、

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x=1-\alpha^6/64 \tag{8}$$

$\alpha^6=64$ なので、$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x=1-\alpha^6/64=0$ を得る。$1-\frac{\alpha}{2}\neq 0$ より、$x=0.$

(3-4) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$

$\alpha=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},\ \beta=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ より、$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ を得る。これより、

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}\times 12}=2^6e^{\mathrm{i}\pi}=-64 \tag{9}$$

問題 4

$\alpha=e^{\mathrm{i}\pi/3},\ \beta=e^{\mathrm{i}\pi/4}$ とする。α/β を計算することにより、$\cos\frac{\pi}{12}$ および $\sin\frac{\pi}{12}$ の値を計算せよ。

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}&=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}=e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\\&=\frac{(\sqrt{3}+1)+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\end{aligned} \tag{10}$$

実物と虚部を比較して、$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を得る。

$\boxed{\textbf{問題 5}}$

三角形の三辺の長さを $a,\ b,\ c$ とし、辺 $a,\ b$ の間の角を θ とすると、余弦定理は $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ と書ける。（図を参照）

複素数 $\alpha,\ \beta$ を、$\alpha = a,\ \beta = be^{\mathrm{i}\theta}$ で定める。（図を参照）$c^2 = |\alpha - \beta|^2$ を計算することにより、余弦定理を証明せよ。

$$\begin{aligned} c^2 &= |\alpha - \beta|^2 \\ &= |a - be^{\mathrm{i}\theta}|^2 \\ &= |(a - b\cos\theta) + \mathrm{i}(-b\sin\theta)|^2 \\ &= (a - b\cos\theta)^2 + (-b\sin\theta)^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned} \tag{11}$$