数学演習I　第6回　複素数の極形式

2013年5月15日

担当：佐藤 純

問題1

以下の複素数を複素平面上に図示し、極形式で表せ。

(1-1) $1+\mathrm{i}$

(1-2) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

(1-3) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

(1-4) $-1+\mathrm{i}$

(1-5) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}$

問題2

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ を使って、以下の式を証明せよ。

(2-1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2-2) $\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$

問題3

$\alpha=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\ \beta=1+\mathrm{i}$ とするとき、以下の値を求めよ。

(3-1) α^6

(3-2) β^8

(3-3) $1+\alpha/2+\alpha^2/4+\alpha^3/8+\alpha^4/16+\alpha^5/32$

(3-4) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$

問題4

$\alpha=e^{\mathrm{i}\pi/3},\ \beta=e^{\mathrm{i}\pi/4}$ とする。α/β を計算することにより、$\cos\dfrac{\pi}{12}$ および $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を計算せよ。

問題5

三角形の三辺の長さを $a,\ b,\ c$ とし、辺 $a,\ b$ の間の角を θ とすると、余弦定理は $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ と書ける。（図を参照）

複素数 $\alpha,\ \beta$ を、$\alpha=a,\ \beta=be^{\mathrm{i}\theta}$ で定める。（図を参照）$c^2=|\alpha-\beta|^2$ を計算することにより、余弦定理を証明せよ。