数学演習 I　第 5 回　複素数

2013 年 5 月 8 日

担当：佐藤 純

問題 1

$\alpha = 2 - 3\mathrm{i}$, $\beta = 1 + 2\mathrm{i}$ とする。以下の式を、$x + \mathrm{i}y$, (x, y は実数) の形に計算せよ。

(1-1) $\alpha + \beta = 3 - \mathrm{i}$

(1-2) $\alpha\beta = 8 + \mathrm{i}$

(1-3) $\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{7\mathrm{i}}{5}$

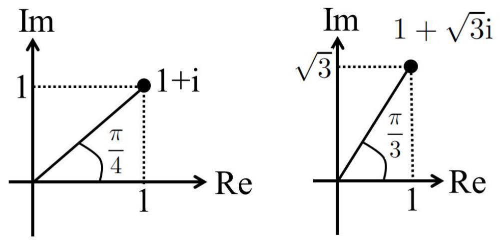
(1-4) $3\alpha - 2\beta = 4 - 13\mathrm{i}$

(1-5) $2\mathrm{i}\alpha = 6 + 4\mathrm{i}$

問題 2

$\alpha = 1 + \mathrm{i}$, $\beta = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ とする。

(2-1) α, β を複素平面上に図示せよ。x 軸となす角も書き込むこと。



(2-2) α^2 を計算せよ。

$\alpha^2 = 2\mathrm{i}$

(2-3) $\beta^2 - 2\beta + 4$ を計算せよ。

$\beta^2 - 2\beta + 4 = 0$

問題 3

以下の複素数の絶対値を求めよ。

(3-1) $|-2\mathrm{i}(3+4\mathrm{i})(12-5\mathrm{i})| = |-2\mathrm{i}| \times |3+4\mathrm{i}| \times |12-5\mathrm{i}| = 2 \times 5 \times 13 = 130$

(3-2) $\left|\dfrac{(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}\right| = \dfrac{|1+2\mathrm{i}| \times |3+4\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}| \times |1-2\mathrm{i}|} = \dfrac{|3+4\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

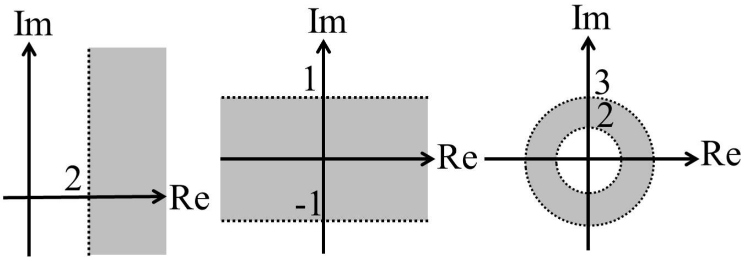
問題 4

以下の式で表される領域を、複素平面上に図示せよ。

(4-1) $\mathrm{Re}\, z > 2$

(4-2) $-1 < \mathrm{Im}\, z < 1$

(4-3) $2 < |z| < 3$



$\boxed{\textbf{問題 5}}$

複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとする。

(5-1) $\dfrac{1}{z} = z^*$ を示せ。

$zz^* = |z|^2 = 1$ より直ちに $\dfrac{1}{z} = z^*$ を得る。

(5-2) $\dfrac{z}{1+z^2}$ は実数になることを示せ。

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{\frac{1}{z}+z} = \frac{1}{z^*+z} \tag{1}$$

$z + z^*$ は実数なので、証明終。