数学演習 I　第 4 回　指数関数, 対数関数

2013 年 5 月 1 日

担当：佐藤 純

問題 1

以下の値を求めよ。

(1-1) $4^{\frac{5}{2}} \times 27^{-\frac{4}{3}} = 2^5 \times 3^{-4} = \dfrac{32}{81}$

(1-2) $\log_{10} 0.1 = -1$

(1-3) $\log_3 2 - \log_3 18 = \log_3 2 - \log_3(2 \times 3^2) = \log_3 2 - (\log_3 2 + 2\log_3 3) = -2$

問題 2

(2-1) a, b, c を正の実数とし、a, c は 1 でないとする。$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を証明せよ。

$x = \log_a b$ とすると、$b = a^x$ である。両辺 $\log_c$ をとると、$\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$ なので、$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を得る。

(2-2) $\log_9 27$ を計算せよ。

$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2}$

問題 3

以下の方程式を解け。

(3-1) $2\log_3(x+1) = 2$

$\log_3(x+1) = 1,\ x+1 = 3,\ x = 2.$

(3-2) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

$\log_2(x+5)(x-2) = 3,\ (x+5)(x-2) = 2^3 = 8,\ x^2 + 3x - 18 = 0,\ (x-3)(x+6) = 0,$ $x+5 > 0,\ x-2 > 3$ より、$x = 3.$

問題 4

ドラえもんの道具に、栗饅頭の数が 5 分で 2 倍になるバイバインという道具がある。

(4-1) 栗饅頭を直径 3cm の球、宇宙を直径 300 億光年の球とすると、宇宙の体積は栗饅頭の体積の何倍となるか？ただし、1 光年は 10 兆 km である。

宇宙の直径 $= 300$ 億光年 $= 3 \times 10^{10}$ 光年 $= 3 \times 10^{10} \times 10^{13}$km $= 3 \times 10^{23}$km$= 3 \times 10^{28}$cm なので、直径は 10^{28} 倍。よって、体積は、$(10^{28})^3 = 10^{84}$ 倍。

(4-2) 最初に栗饅頭が一個あったとして、バイバインを使うとおよそどのくらいの時間の後に、栗饅頭の体積が宇宙の体積を超えるか？ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$ を使ってよい。

n 回の分裂で宇宙体積を超えるとすると、$2^n = 10^{84}$ となる。両辺 $\log_{10}$ を取ると、$84 = \log_{10} 2^n = n\log_{10} 2 = 0.3010n$. よって, $n = 84/0.3010 = 279$ となる。1 回の分裂に 5 分かかるので、279×5 分 $= 1395$ 分 $=$ 約 24 時間。

問題5

双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定義する。加法定理

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

を示せ。

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta \\
&= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} = \cosh(\alpha+\beta) = (\text{左辺})
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta \\
&= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2} = \sinh(\alpha+\beta) = (\text{左辺})
\end{aligned} \tag{2}$$