数学演習I　第3回　三角関数, 指数関数

2013年4月24日

担当：佐藤 純

問題1

以下の値を求めよ。

(1-1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

(1-2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$

(1-3) $\tan^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$

問題2

次の極限値を求めよ。

(2-1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}4\frac{\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4$

(2-2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x}\frac{2x}{\sin 2x}\right)=\frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\right)=\frac{3}{2}\times 1\times 1=\frac{3}{2}$

(2-3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{1}$$

(2-4) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$x=y+\pi$ とおくと、$x\to\pi$ のとき、$y\to 0$ なので、

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}\tag{2}$$

(2-5) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x}$

$x=y+\pi/2$ とおくと、$x\to\pi/2$ のとき、$y\to 0$ なので、

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos(y+\pi/2)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-\sin y}=-1\tag{3}$$

ここで、極限値

$$\frac{\sin x}{x}=1\tag{4}$$

を使った。

問題 3

以下の値を求めよ。

(3-1) $(-8)^{1/3} = -2$

(3-2) $\left(3^{-\frac{5}{4}}\right)^{\frac{8}{5}} = 3^{-\frac{5}{4}\times\frac{8}{5}} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

(3-3)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a = e^a \tag{5}$$

ここで、ネイピア数の定義式

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{6}$$

を使った。

問題 4

x に関する方程式 $9^x - 3^x - 6 = 0$ を解け。
$y = 3^x$ とすると、$y^2 - y - 6 = 0$. $(y+2)(y-3) = 0$ より、$y = 3, -2$. x が実数のとき、$y > 0$ なので、$y = 3$. よって、$x = 1$.