

問題 1

以下の角度を、度数法の場合は弧度法に、弧度法の場合は度数法に換算せよ。

(1-1) $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

(1-2) $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

(1-3) $\frac{2}{3}\pi = 120^\circ$

(1-4) $\frac{11}{6}\pi = 330^\circ$

問題 2

次の値を求めよ。

(2-1) $\sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$

(2-2) $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

(2-3) $\tan \frac{7}{4}\pi = -1$

(2-4) $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

において、 $\alpha = \beta$ とおくと、

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (2)$$

を得る。

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ より、

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (3)$$

なので、

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (4)$$

を得る。

よって、

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad (5)$$

を得る。

$$(2-5) \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(1+3) + 2\sqrt{1 \times 3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

二重根号のはずし方：

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \quad (7)$$

より、

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (8)$$

別解：

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (9)$$

問題 3

以下の式を、 $A \sin(x + \alpha)$ の形に表せ。

$$(3-1) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(3-2) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(3-3) \sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x = 2\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

与式において、

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \quad (10)$$

と定数をくくり出すと、

$$A \sin(x + \alpha) = A (\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) \quad (11)$$

なので、 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり、 $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を満たすような角度 α を見つければよい。

問題 4

$0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $\sin x + \cos x$ の最小値と最大値を求めよ。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad (12)$$

$0 \leq x \leq \pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ なので、 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ は最大値 1 をとり、
 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ のとき $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ は最小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

したがって、 $x = \frac{\pi}{4}$ のとき $\sin x + \cos x$ は最大値 $\sqrt{2}$ をとり、 $x = \pi$ のとき $\sin x + \cos x$ は最小値 -1 をとる。