数学演習 I　第 14 回　微分の応用 2

2013 年 7 月 10 日

担当：佐藤 純

問題 1

以下の関数のグラフを描け。極大極小点がある場合は、その座標も書き込むこと。

(1-1) $y = e^{-x^2}$

$f(-\infty) = f(+\infty) = 0,\ f(0) = 1$

x	$\sim$	0	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

(1-2) $y = xe^{-x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

x	$\sim$	1	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

(1-3) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

x	$\sim$	$\log 2$	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$

$f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x} = e^{-x}(2e^{-x} - 1) = 0$ を解くと、

$e^{-x} = \frac{1}{2},$

$-x = \log\frac{1}{2} = -\log 2,$

$x = \log 2.$

(1-4) $y = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$

$f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \log f(x) = \frac{\log x}{x}.$

$g(+0) = -\infty,\ g(+\infty) = 0,\ g(1) = 0$

x	$\sim$	e	$\sim$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

$f(+0) = e^{-\infty} = 0,\ f(+\infty) = e^0 = 1,\ f(1) = e^0 = 1$

x	$\sim$	e	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$

問題 2

$x > 0$ のとき、$\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

$f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ とすると、
$f'(x) = -\sin x + x,$
$f''(x) = -\cos x + 1.$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ より、$f''(x) \geq 0.$
$f'(0) = 0$ かつ $f''(x) \geq 0$ (等号成立は $x = 2n\pi$ のときのみ) より、
$x > 0$ において $f'(x) > 0.$
したがって、$f(0) = 0$ より、$x > 0$ において $f(x) > 0.$
すなわち、$\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$ なので、題意は示された。

問題 3

方程式 $e^x = \pi x$ の実数解の個数を求めよ。

$f(x) = e^x - \pi x$ とする。

$f(-\infty) = +\infty,\ f(+\infty) = +\infty,\ f(0) = 1$

x	$\sim$	$\log \pi$	$\sim$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\pi(1 - \log \pi)$	$\nearrow$

$e < \pi$ より、$\log \pi > 1$ なので、$\pi(1 - \log \pi) < 0$ より、$f(x)$ のグラフは x 軸と 2 点で交わるので、解の個数は 2 個。