数学演習 I　第 13 回　微分の応用

2013 年 7 月 3 日

担当：佐藤 純

問題 1

(1-1) $e^x, \cos x, \sin x$ をマクローリン展開せよ。

$f(x) = e^x$ とすると、$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ より、
$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1.$
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \dfrac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \dfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \dfrac{1}{5!}f^{(5)}(0)x^5 + \cdots$ より、

$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5 + \cdots.$

$f(x) = \cos x$ とすると、$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)} = \cos x$ より、$f^{(4n)} = \cos x,\ f^{(4n+1)} = -\sin x,\ f^{(4n+2)} = -\cos x,\ f^{(4n+3)} = \sin x,\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ なので、
$f^{(4n)} = 1,\ f^{(4n+1)} = 0,\ f^{(4n+2)} = -1,\ f^{(4n+3)} = 0,\ (n = 0, 1, 2, \cdots).$

したがって、$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \cdots.$

同様にして、$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \cdots.$

(1-2) e^x の展開式に $x = \mathrm{i}\theta$ を代入することにより、オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を示せ。

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\theta} &= 1 + \mathrm{i}\theta + \frac{1}{2}(\mathrm{i}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}\theta)^3 + \frac{1}{4!}(\mathrm{i}\theta)^4 + \frac{1}{5!}(\mathrm{i}\theta)^5 + \cdots \\
&= 1 + \mathrm{i}\theta + \frac{1}{2}(-\theta^2) + \frac{1}{3!}(-\mathrm{i}\theta^3) + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}(\mathrm{i}\theta^5) + \cdots \\
&= 1 + \mathrm{i}\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \mathrm{i}\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \mathrm{i}\frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta
\end{aligned} \tag{1}
$$

問題 2

$\sqrt[3]{2}$ の値をできるだけ正確に知りたい。

(2-1) $\sqrt[3]{2} = 1.25 \times (1.024)^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

$$
1.25 \times (1.024)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1024}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}\left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}\frac{2^{\frac{10}{3}}}{10} = \frac{2^{\frac{10}{3}}}{2^3} = 2^{\frac{10}{3}-3} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \tag{2}
$$

(2-2) $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ を x の 2 次までマクローリン展開すると、$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + \cdots$ となることを示せ。

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ とすると、
$f'(x) = \dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}},\ f''(x) = -\dfrac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$ より、
$f(0) = 1,\ f'(0) = \dfrac{1}{3},\ f''(0) = -\dfrac{2}{9}$ なので、
$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + \cdots.$

(2-3) $\sqrt[3]{2}$ の値をできるだけ正確に求めよ。

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} = 1.25 \times (1.024)^{\frac{1}{3}} &= 1.25 \times \left(1 + \frac{1}{3}0.024 - \frac{1}{9}0.024^2\right) \\ &= 1.25 \times \left(1 + 0.008 - 0.008^2\right) \\ &= 1.25 \times (1 + 0.008 - 0.000064) \\ &= 1.25 \times 1.007936 \\ &= 1.25992 \end{aligned} \tag{3}$$

問題 3

正の実数 x に対し、$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

$a = \tan^{-1} x$ とおくと、$x = \tan a.$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\tan a} = \frac{1}{x} \tag{4}$$

したがって、$\dfrac{\pi}{2} - a = \tan^{-1} \dfrac{1}{x}$ より直ちに与式を得る。

問題 4

以下の極限値を計算せよ。

(4-1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

(4-2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$

(4-3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

$y = x^{\frac{1}{x-1}}$, $z = \log y = \dfrac{\log x}{x-1}$ とおく。

$\lim\limits_{x \to 1} z = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1$ より、$\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} e^z = e^1 = e$

(4-4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

(4-5) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

(4-6)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + x^2} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{\sin x (x + x^2)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x - \cos x}{\cos x (x + x^2) + \sin x (1 + 2x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2 + \sin x}{- \sin x (x + x^2) + \cos x (1 + 2x) + \cos x (1 + 2x) + 2 \sin x} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5}$$

(4-7) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}}$

$y = \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}}$, $z = \log y = \dfrac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$ とすると、

$$\lim_{x \to 0} z = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = 2 \tag{6}$$

より、

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} e^z = e^2 \tag{7}$$