統計力学演習　期末試験　解答

2012年9月25日

問題1

(1-1)〜(1-6) ba bd de
(1-7) $Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}$

問題2

(2-1)

$$E = -\mu H \times N_\uparrow + \mu H \times (N - N_\uparrow) = \mu H(N - 2N_\uparrow) \tag{1}$$

(2-2)

$$W = \frac{N!}{(N_\uparrow)!(N - N_\uparrow)!} \tag{2}$$

(2-3)

$$S = k_B \left[N \log N - N_\uparrow \log N_\uparrow - (N - N_\uparrow) \log(N - N_\uparrow) \right] \tag{3}$$

(2-4)

$$1/T = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial N_\uparrow}{\partial E} \frac{\partial S}{\partial N_\uparrow} = -\frac{k_B}{2\mu H} \log \frac{N - N_\uparrow}{N_\uparrow}, \tag{4}$$

$$N_\uparrow = \frac{N}{1 + e^{-2\beta\mu H}}, \tag{5}$$

$$E = N\mu H \frac{e^{-\beta\mu H} - e^{\beta\mu H}}{e^{-\beta\mu H} + e^{\beta\mu H}} = -N\mu H \tanh \beta\mu H \tag{6}$$

問題3

(3-1)

$$z = e^{-\beta(-\mu H)} + e^{-\beta(+\mu H)} = e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H} = 2\cosh \beta\mu H \tag{7}$$

これから、

$$Z = z^N = 2^N \cosh^N \beta\mu H \tag{8}$$

を得る。

(3-2)

$$F = -\frac{1}{\beta}\log Z = -\frac{1}{\beta}\log[2^N \cosh^N \beta\mu H] = -\frac{N}{\beta}[\log 2 + \log\cosh\beta\mu H] \tag{9}$$

(3-3)

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}[\log 2 + \log\cosh\beta\mu H] = -N\mu H \tanh\beta\mu H \tag{10}$$

(3-4)
(a)$E(T \to 0) = E(\beta \to +\infty) = -N\mu H$
絶対零度では、全てのスピンが上を向いている。熱揺らぎがなく、最低エネルギー状態に凍りついている。
(b)$E(T \to \infty) = E(\beta \to +0) = 0$
温度無限大では、全てのスピンが完全にランダムな向きをとり、スピンが上を向く確率と下を向く確率がともに $1/2$ となり、エネルギーの平均値としてはゼロになっている。

$\boxed{\text{問題 4}}$

(4-1)

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = e^{-\beta\hbar\omega/2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = e^{-\beta\hbar\omega/2}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \tag{11}$$

(4-2)

$$Z = z^{3N} = \frac{1}{2^{3N}\sinh^{3N}(\beta\hbar\omega/2)} \tag{12}$$

$\boxed{\text{問題 5}}$

(5-1)

$$Z_G = \prod_{j=1}^{\infty}\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j} = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}} \qquad \text{ボソン} \tag{13}$$

$$Z_G = \prod_{j=1}^{\infty}\sum_{n_j=0}^{1} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right) \qquad \text{フェルミオン} \tag{14}$$

(5-2) Boson:

$$
\begin{aligned}
f_j &= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log\left[\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}}\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\sum_{j=1}^{\infty}\log\left[1-e^{-\beta(e_j-\mu)}\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\beta e^{-\beta(e_j-\mu)}}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta(e_j-\mu)}-1}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Fermion:

$$
\begin{aligned}
f_j &= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log\left[\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\sum_{j=1}^{\infty}\log\left[1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right] \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{-\beta e^{-\beta(e_j-\mu)}}{1+e^{-\beta(e_j-\mu)}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta(e_j-\mu)}+1}
\end{aligned} \tag{16}
$$

$\boxed{\text{問題 6}}$

(6-1)

$$
\delta E = \langle E^2 - 2E\langle E\rangle + \langle E\rangle^2\rangle = \langle E^2\rangle - 2\langle E\rangle\langle E\rangle + \langle E\rangle^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 \tag{17}
$$

(6-2) 分配関数を

$$
Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \tag{18}
$$

として、エネルギーの期待値は

$$
\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}Z\right) = -\frac{Z'}{Z}, \\
\langle E^2\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}Z\right) = \frac{Z''}{Z}
\end{aligned} \tag{19}
$$

と書ける。ただし、$Z' = \dfrac{\partial Z}{\partial \beta}$, $Z'' = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$ である。
比熱 C は、

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \tag{20}$$

なので、

$$k_B T^2 C = \left(\frac{Z'}{Z} \right)' = \frac{Z''}{Z} - \frac{(Z')^2}{Z^2} = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \tag{21}$$

(6-3) 系のコピーを x 個集めた系を考えると、$N \to xN$, $V \to xV$, $T \to T$ なので、

$$Z(xN, xV, T) = Z^x(N, V, T) \tag{22}$$

を得る。これの対数をとって x で微分すると、

$$N \frac{\partial \log Z(xN, xV, T)}{\partial (xN)} + V \frac{\partial \log Z(xN, xV, T)}{\partial (xV)} = \log Z(N, V, T) \tag{23}$$

ここで、$x \to 1$ として与式を得る。