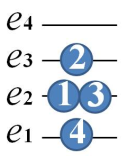
# 統計力学演習　第11回　ボース・フェルミ分布　　2012年7月3日

$\boxed{\text{問題 1}}$　[占有数による理想量子気体の状態指定]

相互作用のない多粒子系を考える。1粒子の場合のエネルギー固有状態を $j=1,2,3,\cdots$ とし、状態 $j$ のエネルギー固有値を $e_j$ とする。ここで、エネルギーが低い順に状態の番号付けがなされていて、縮退はないとする $(e_1<e_2<e_3<\cdots)$。

粒子間に相互作用がないので、系全体のエネルギーは個々の粒子のエネルギーの単純な和になる。1番目の粒子が状態 $j_1$, 2番目の粒子が状態 $j_2$, $\cdots$, $N$ 番目の粒子が状態 $j_N$ にあるとすると、系全体のエネルギー $E$ は、$E=e_{j_1}+e_{j_2}+\cdots+e_{j_N}$ となる。

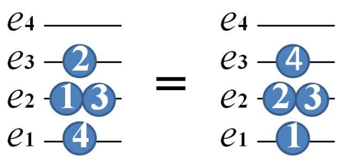
例：$N=4,\quad (j_1,j_2,j_3,j_4)=(2,3,2,1)$ のとき、$E=e_2+e_3+e_2+e_1=e_1+2e_2+e_3.$




(1-1) 系の構成粒子が $N$ 個の同種のボソン及びフェルミオンのそれぞれの場合について、基底状態エネルギー $E_0$ と、第一励起エネルギー $E_1$ を求めよ。

(1-2) 粒子数を $N=2$ とし、1粒子固有状態は、$j=1,2,3$ の3状態のみをとるとする。系の構成粒子が (a) 区別可能な粒子 (b) 同種のボソン (c) 同種のフェルミオンのそれぞれの場合について、系のとりうる微視的状態数 $W$ を求めよ。

系が同種粒子からなるとすると粒子が区別できなくなり、粒子にどのように番号付けしても同じ状態を表すので、$j_1\le j_2\le j_3\le\cdots$ が成り立つように適当に粒子の番号を入れ替えることができる。上の例で言うと、$(j_1,j_2,j_3,j_4)=(2,3,2,1)$ と、これを小さい順に並び変えた $(j_1,j_2,j_3,j_4)=(1,2,2,3)$ は同じ状態を表す。




このことから、系の状態を表す変数として $(j_1,j_2,\cdots,j_N)$ の代わりに、占有数 $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ を使ってもよいことがわかる。ここで、$n_j$ は、$j$ 番目の状態をとる粒子数である。上の例で言うと、$(n_1,n_2,n_3,n_4)=(1,2,1,0)$ である。容易にわかるように、$(j_1,j_2,\cdots,j_N)$ と $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ は一対一対応している。

(1-3) $(j_1,j_2,\cdots,j_7)=(1,2,2,4,5,5,5)$ に対応する $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ を求めよ。また、$(n_1,n_2,n_3,\cdots)=(2,0,1,3,0,0,0,\cdots)$ に対応する $(j_1,j_2,j_3,\cdots,j_N)$ を求めよ。

(1-4) 系の全エネルギー $E$ および全粒子数 $N$ を $n_j$ を用いて表せ。

$\boxed{\text{問題 2}}$ [ボース分布関数・フェルミ分布関数]

前の問題により、同種粒子からなる理想量子気体の状態は、占有数の組 $(n_1, n_2, n_3, \cdots)$ によって一意に指定されることがわかる。よって、大分配関数 $Z_G$ を考えると、系の状態に関する和は占有数 $(n_1, n_2, n_3, \cdots)$ に関する和になり、

$$Z_G = \sum_{(n_1, n_2, \cdots)} e^{-\beta[E(n_1,n_2,\cdots)-\mu N(n_1,n_2,\cdots)]} \tag{1}$$

と書ける。ここで、$E(n_1, n_2, \cdots)$, $N(n_1, n_2, \cdots)$ は状態 $(n_1, n_2, \cdots)$ における全エネルギーと全粒子数である。

(2-1) 全問 (1-4) の結果を使うと、大分配関数 $Z_G$ は、

$$Z_G = \sum_{(n_1, n_2, \cdots)} \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j} \tag{2}$$

と書けることを示せ。

(2-2) ボソンは一つの状態 $j$ を占める粒子数に制限はないので、$\displaystyle\sum_{n_j} = \sum_{n_j=0}^{\infty}$ となり、フェルミオンは一つの状態 $j$ をふたつの粒子が占めることはできないので $\displaystyle\sum_{n_j} = \sum_{n_j=0}^{1}$ となる。各占有数 $n_1, n_2, \cdots$ に関する和を独立に実行することにより、

$$Z_G = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}} \qquad \text{ボソン} \tag{3}$$

$$Z_G = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right) \qquad \text{フェルミオン} \tag{4}$$

を示せ。

(2-3) 状態 $j$ を占める粒子数の平均値を $f_j = \langle n_j \rangle$ とする。

$$f_j = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G \tag{5}$$

を示せ。

(2-4) 上の式を計算することにより、

$$f_j = \frac{1}{e^{\beta(e_j-\mu)}-1} \qquad \text{ボース分布関数} \tag{6}$$

$$f_j = \frac{1}{e^{\beta(e_j-\mu)}+1} \qquad \text{フェルミ分布関数} \tag{7}$$

を示せ。