統計力学演習　第7回　数学的準備2

2012年6月5日

以下、$x_1, x_2, \cdots$ は全て実数とする。

問題1 [条件付き最適化問題]

(1-1) 関数 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2$ の最小値とそのときの x_1, x_2 を求めよ。

(1-2) 束縛条件 $x_1 + x_2 = 3$ のもとで、関数 $f(x_1, x_2)$ の最小値とそのときの x_1, x_2 を求めよ。

問題2 [ラグランジュの未定乗数法]

(2-1) 束縛条件 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ のもとで、関数 $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2-2) 束縛条件 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 = 1$ のもとで、関数 $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + Nx_N$ の最大値と最小値を求めよ。

問題3 [行列の対角化]

(3-1) 行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。

(3-2) 固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を求めよ。ただし、$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ と規格化せよ。

(3-3) 固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を横に並べた行列を $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ とする。
$P^{-1} = P^t$ および、$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ を示せ。

(3-4) 行列 A の i 行 j 列成分を A_{ij} と書く。$\mathrm{tr}A$ は、行列の対角成分の和 $\mathrm{tr}A = \sum_j A_{jj}$ を表すとする。$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ。

(3-5) $\mathrm{tr}M^N$ を計算せよ。