

問題1 [正準分布]

温度 T で熱平衡にある系を考える。系の取りうる全ての微視的状态に $n = 1, 2, 3, \dots$ と通し番号をつけ、そのときの系のエネルギーを E_1, E_2, E_3, \dots とする。

(1-1) 正準分布によると、エネルギーが E_n であるような状態 n をとる確率 p_n は $e^{-\beta E_n}$ に比例する。ここで、 β は逆温度 $\beta = 1/(k_B T)$ である。このとき、

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \quad (1)$$

を示せ。ここで、 Z は分配関数 (状態和)

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (2)$$

である。

(1-2) 系のエネルギー期待値 E は、 $E = \sum_n p_n E_n$ と計算される。これは分配関数 Z を使って、

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \quad (3)$$

と書けることを示せ。

(1-3) この結果とギブス・ヘルムホルツの式 $E = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F)$ を比較することにより、

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z \quad (4)$$

を示せ。

問題2 [正準分布による2準位系の計算]

N 個の磁性原子からなる磁性体を考える。各磁性原子は上向きスピン、下向きスピンの2状態をとるとし、その磁気モーメントを μ とする。磁性体には磁場 H がかかっている、各原子はスピンの上向きの際は $-\mu H$ 、下向きの際は μH のエネルギーを持つ。

(2-1) 分配関数 Z を計算せよ。

(2-2) ヘルムホルツの自由エネルギー F を計算せよ。

(2-3) エネルギー E を計算し、前回の問題 (1-4) の結果と一致することを確認せよ。

(2-4) 絶対零度における磁性体のエネルギー $E(T \rightarrow 0)$ と、温度無限大におけるエネルギー $E(T \rightarrow \infty)$ を求め、その物理的意味を述べよ。