

問題1 [Stirling の公式]

Stirling の公式

$$\log N! \simeq N \log N - N \quad (1)$$

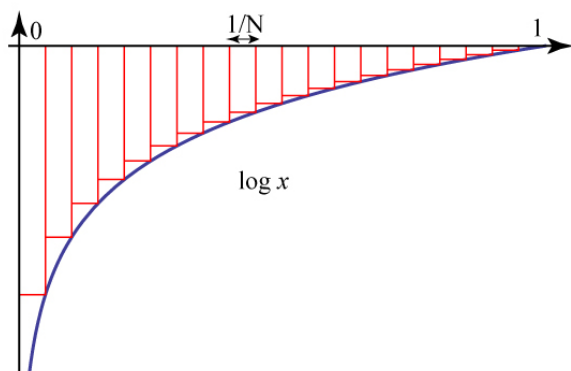
を以下の手順で示せ。

(1-1) 積分

$$I = \int_0^1 \log x dx \quad (2)$$

を考える。積分区間を $\int_{\epsilon}^1 \log x dx$ として計算 (ϵ は正の実数) したのちに、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすることによって、 $I = -1$ を示せ。

(1-2) 区分別積法によって積分区間を N 等分し、積分 I を近似したものを I_N とする。
(図中、赤い長方形の面積の和にマイナスをつけたもの)。 I_N を計算せよ。



(1-3) $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = I = -1$ より、Stirling の公式 (1) を示せ。(大雑把な議論でよい)

問題2 [ガンマ関数]

正の実数 t に対し、ガンマ関数 $\Gamma(t)$ を

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (3)$$

で定義する。

(2-1) 漸化式 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を示せ。

(2-2) 自然数 n に対し、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ を示せ。

(2-3) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、積分

$$J_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad (4)$$

をガンマ関数を使って表せ。

問題3 [Gauss 積分]

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、積分 J_n を問題2の式(4)で定義する。

(3-1) Gauss の積分公式

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (5)$$

を示せ。

(ヒント: $\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)}$ として極座標に変換)

(3-2) 問題2の結果と合わせて、 J_1, J_2, J_3, J_4 の値を具体的に計算せよ。