統計力学演習　期末試験　解答

2011年9月27日

$\boxed{\text{問題 1}}$　abab ab bd

$\boxed{\text{問題 2}}$

(2-1) $p_n = ce^{-\beta E_n}$ とする。確率の規格化条件より、

$$1 = \sum_n p_n = \sum_n ce^{-\beta E_n} = c\sum_n e^{-\beta E_n} = cZ. \tag{1}$$

よって、$c = 1/Z$ となり、$p_n = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}$ を得る。

(2-2)

$$E = \sum_n p_n E_n = \sum_n \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}E_n = \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}E_n \tag{2}$$

一方、

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z}\sum_n \frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}E_n \tag{3}$$

よって、$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z$ を得る。

$\boxed{\text{問題 3}}$

(3-1)

$$z = e^{-\beta(-\mu H)} + e^{-\beta(+\mu H)} = e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H} = 2\cosh\beta\mu H \tag{4}$$

これから、

$$Z = 2^N \cosh^N \beta\mu H \tag{5}$$

を得る。

(3-2)

$$F = -\frac{1}{\beta}\log Z = -\frac{1}{\beta}\log[2^N\cosh^N\beta\mu H] = -\frac{N}{\beta}[\log 2 + \log\cosh\beta\mu H] \tag{6}$$

(3-3)

$$E = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F) = -N\frac{\partial}{\partial \beta}[\log 2 + \log\cosh \beta\mu H] = -N\mu H \tanh \beta\mu H \tag{7}$$

(3-4)

(a)$E(T \to 0) = E(\beta \to +\infty) = -N\mu H$

絶対零度では、全てのスピンが上を向いている。熱揺らぎがなく、最低エネルギー状態に凍りついている。

(b)$E(T \to \infty) = E(\beta \to +0) = 0$

温度無限大では、全てのスピンが完全にランダムな向きをとり、スピンが上を向く確率と下を向く確率がともに 1/2 となり、エネルギーの平均値としてはゼロになっている。

$\boxed{\text{問題 4}}$

(4-1)

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = e^{-\beta\hbar\omega/2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = e^{-\beta\hbar\omega/2}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \tag{8}$$

$\boxed{\text{問題 5}}$

(5-1)

$$Z_G = \prod_{j=1}^{\infty}\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j} = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}} \qquad \text{ボソン} \tag{9}$$

$$Z_G = \prod_{j=1}^{\infty}\sum_{n_j=0}^{1} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right) \qquad \text{フェルミオン} \tag{10}$$

(5-2)

$$\begin{aligned} f_j = \langle n_j \rangle &= \sum_{(n_1,n_2,\cdots)} p(n_1,n_2,\cdots)n_j \\ &= \sum_{(n_1,n_2,\cdots)} \frac{1}{Z_G}\left(\prod_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j}\right) n_j \\ &= \frac{1}{Z_G}\sum_{(n_1,n_2,\cdots)}\left(\prod_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j}\right) n_j \end{aligned} \tag{11}$$

一方、

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G &= -\frac{1}{\beta}\frac{1}{Z_G}\frac{\partial Z_G}{\partial e_j} \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{1}{Z_G}\sum_{(n_1,n_2,\cdots)}\left(\prod_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j}\right)(-\beta n_j) \\
&= \frac{1}{Z_G}\sum_{(n_1,n_2,\cdots)}\left(\prod_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(e_j-\mu)n_j}\right)n_j
\end{aligned}
\tag{12}
$$

よって、

$$
f_j = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G \tag{13}
$$

を得る。

(5-3) Boson:

$$
\begin{aligned}
f_j &= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log\left[\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}}\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\sum_{j=1}^{\infty}\log\left[1-e^{-\beta(e_j-\mu)}\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\beta e^{-\beta(e_j-\mu)}}{1-e^{-\beta(e_j-\mu)}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta(e_j-\mu)}-1}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Fermion:

$$
\begin{aligned}
f_j &= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log Z_G \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\log\left[\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial e_j}\sum_{j=1}^{\infty}\log\left[1+e^{-\beta(e_j-\mu)}\right] \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{-\beta e^{-\beta(e_j-\mu)}}{1+e^{-\beta(e_j-\mu)}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta(e_j-\mu)}+1}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$\boxed{\text{問題 6}}$

(6-1)

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial\beta} &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_n p_n A_n \\
&= -\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_n \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}A_n \\
&= -\sum_n \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}A_n\right) \\
&= -\sum_n \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\beta E_n}\right)A_n - \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{Z}\right)e^{-\beta E_n}A_n \\
&= \sum_n \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}E_n A_n + \sum_n \frac{1}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial\beta}e^{-\beta E_n}A_n \\
&= \sum_n p_n E_n A_n + \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\left(\sum_n \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}A_n\right) \\
&= \langle EA\rangle - \left(\sum_n p_n E_n\right)\left(\sum_n p_n A_n\right) \\
&= \langle EA\rangle - \langle E\rangle\langle A\rangle
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(6-2)

$$
\begin{aligned}
-k_B\sum_n p_n \log p_n &= -k_B\sum_n p_n(-\log Z - \beta E_n) \\
&= k_B \log Z \sum_n p_n + k_B\beta\sum_n p_n E_n \\
&= k_B \log Z + k_B\beta\sum_n p_n E_n \\
&= -k_B\beta F + k_B\beta\langle E\rangle \\
&= \frac{\langle E\rangle - F}{T} \\
&= S
\end{aligned}
\tag{17}
$$