統計力学演習　第7回　イジング模型

2011年6月7日

問題1　[双曲線関数]

三角関数は指数関数を用いて、$\cos x = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と表される。これとの類推で、双曲線関数を

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

で定義する。

(1-1) $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ のグラフの概形を書け。

(1-2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ。

(1-3) $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ の x 微分を計算せよ。

(1-4) $\sinh(\alpha+\beta)$, $\cosh(\alpha+\beta)$, $\tanh(\alpha+\beta)$ を計算せよ。

問題2　[行列の対角化]

(2-1) 行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。

(2-2) 固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ を求めよ。ただし、$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ と規格化せよ。

(2-3) 固有ベクトル $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ を横に並べた行列を $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ とする。
$P^{-1} = P^t$ および、$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ を示せ。

(2-4) 行列 A の i 行 j 列成分を A_{ij} と書く。$\mathrm{tr}A$ は、行列の対角成分の和 $\mathrm{tr}A = \sum_j A_{jj}$ を表すとする。$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ。

(2-5) $\mathrm{tr}M^N$ を計算せよ。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [イジング模型]

N 個の磁性原子からなる磁性体を考える。各磁性原子は上向きスピン ($s = 1$)、下向きスピン ($s = -1$) の 2 状態をとるとし、その磁気モーメントを μ とする。磁性体には磁場 H がかかっていて、各原子は $-s\mu H$ のエネルギーを持つとする。

第 5 回で取り扱ったこの磁性体のモデルに、相互作用の効果を取り入れる。最近接のスピン同士で相互作用し、スピンが互いに同じ向きのときは $-J$、反対向きのときは $+J$ の相互作用エネルギーを持つとする。これは強磁性磁石を記述する最も単純な模型となっており、イジング模型と呼ばれる。

系の状態は N 個のスピンの向き $s_1 = \pm 1, s_2 = \pm 1, \cdots, s_N = \pm 1$ で指定され、全状態数は 2^N である。スピン配置が $(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ のときの磁性体の全エネルギーは

$$E(s_1, s_2, \cdots, s_N) = -J \sum_{<j,k>} s_j s_k - \mu H \sum_{j=1}^{N} s_j \tag{2}$$

と書ける。ここで、$\sum_{<j,k>}$ は、最近接のスピンの組全てにわたる和を表す。この磁性体の分配関数 Z は、2^N 個の全ての状態に対してボルツマン重率 $e^{-\beta E}$ を足したものである：

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{-\beta E(s_1, s_2, \cdots, s_N)} \tag{3}$$

(3-1) 相互作用のない場合 ($J = 0$) には、原子ひとつの分配関数を z として、$Z = z^N$ となることを示せ。

以下、リング上に磁性原子が配列している場合を考える（周期境界条件を課した 1 次元イジング模型)。このとき、全エネルギーは以下で与えられる：

$$E(s_1, s_2, \cdots, s_N) = -J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \cdots + s_{N-1} s_N + s_N s_1) - \mu H(s_1 + s_2 + \cdots + s_N). \tag{4}$$

(3-2) $M_{s,s'} = e^{\beta J s s' + \beta \mu H (s+s')/2}$ とすると、分配関数 Z は

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} M_{s_1,s_2} M_{s_2,s_3} \cdots M_{s_{N-1},s_N} M_{s_N,s_1} \tag{5}$$

と書けることを示せ。

(3-3) s 行 s' 列成分が $M_{s,s'}$ で与えられる行列を M とする。具体的に行列表示すると、

$$M = \begin{pmatrix} M_{+1,+1} & M_{+1,-1} \\ M_{-1,+1} & M_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \beta \mu H} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta \mu H} \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる。この行列 M を使って、分配関数は $Z = \mathrm{tr} M^N$ と書けることを示せ。

(3-4) 分配関数 Z を計算せよ。