

**問題1** [大正準分布]

温度  $T$  の熱浴と接して熱平衡にある、同種粒子からなる系を考える。系は熱浴とエネルギーおよび粒子の交換を行い、系のエネルギーおよび粒子数は微視的に揺らいでいるとする。この系の化学ポテンシャルを  $\mu$  とする。

系の取りうる全ての微視的状态に  $n = 1, 2, 3, \dots$  と通し番号をつけ、そのときの系のエネルギーを  $E_1, E_2, E_3, \dots$ 、系の粒子数を  $N_1, N_2, N_3, \dots$  とする。

(1-1) 大正準分布によると、エネルギーが  $E_n$ 、粒子数が  $N_n$  であるような状態  $n$  をとる確率  $p_n$  は  $e^{-\beta(E_n - N_n)}$  に比例する。ここで、 $\beta$  は逆温度  $\beta = 1/(k_B T)$  である。このとき、

$$p_n = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(E_n - N_n)} \quad (1)$$

を示せ。ここで、 $Z_G$  は大分配関数

$$Z_G = \sum_n e^{-\beta(E_n - N_n)} \quad (2)$$

である。

正準分布のときと同様に、

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \log Z_G \quad (3)$$

で、グランドポテンシャル (熱力学ポテンシャル)  $\Omega$  を定義する。

(1-2) 系のエネルギー  $E$ 、粒子数  $N$  は、グランドポテンシャル  $\Omega$  から

$$E - \mu N = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \Omega) \quad (4)$$

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (5)$$

と計算されることを示せ。

問題2 [ボソン・フェルミオン]

同種の（区別できない）2粒子からなる系を考える。これら2粒子に（区別することはできないが、計算の便宜上）1, 2と名前を付け、それぞれの位置座標を $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ とする。系の波動関数を $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ とする。

量子力学の原理によると、同種の粒子は区別することができないので、粒子の名前を入れ替えても状態は変わらない。二つの波動関数が同じ状態を表すとすると、それらは比例関係にある。名前を入れ替えた波動関数は $\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ となるので、比例定数を $\alpha$ として $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \alpha\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ と書ける。

(1-1)  $\alpha^2 = 1$ を示すことにより、 $\alpha = 1, -1$ を示せ。

このことから、自然界の粒子は $\alpha$ の二つの値に対応して二つのグループに分けられることが分かる。 $\alpha = 1$ に対応する粒子をボソン、 $\alpha = -1$ に対応する粒子をフェルミオンと呼ぶ。

(1-2) 2粒子間に相互作用がないとすると、2粒子系の波動関数は1粒子波動関数の積で表される。2粒子のそれぞれが、波動関数 $\phi_j, \phi_k$ で記述される1粒子固有状態 $j, k$ をとるとすると、この2粒子系の波動関数は $\phi_j(\vec{r}_1)\phi_k(\vec{r}_2)$ と $\phi_j(\vec{r}_2)\phi_k(\vec{r}_1)$ の重ね合わせで表される。このとき、2粒子がボソン、フェルミオンの場合の波動関数はそれぞれ

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \phi_j(\vec{r}_1)\phi_k(\vec{r}_2) + \phi_j(\vec{r}_2)\phi_k(\vec{r}_1) \quad \text{Boson} \quad (6)$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \phi_j(\vec{r}_1)\phi_k(\vec{r}_2) - \phi_j(\vec{r}_2)\phi_k(\vec{r}_1) \quad \text{Fermion} \quad (7)$$

と書けることを示せ。

(1-3) フェルミオンの場合、2粒子が同一の状態を占めることはできないこと（パウリの排他原理）を示せ。

(1-4) 1粒子エネルギー固有状態が $j = 1, 2$ だけの2準位系を考え、それらのエネルギー固有値を $\epsilon_1, \epsilon_2$ とする。2粒子が相互作用をしない同種のボソン、フェルミオンの場合の分配関数を計算せよ。