統計力学演習　第１回　数学公式の確認

2011 年 4 月 19 日

$\boxed{\text{問題 1}}$　[Stirling の公式]

Stirling の公式

$$\log N! \simeq N \log N - N \tag{1}$$

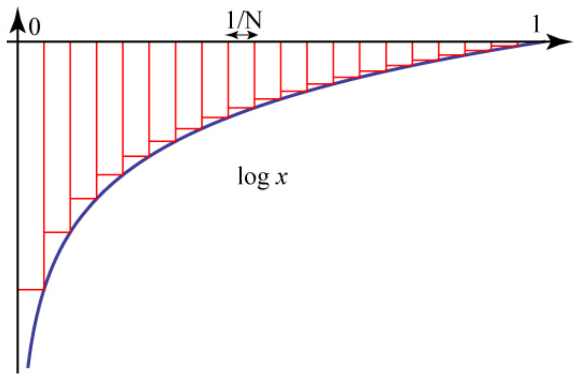
を以下の手順で示せ。

(1-1) 積分

$$I = \int_0^1 \log x \mathrm{d}x \tag{2}$$

を考える。積分区間を $\int_\epsilon^1 \log x \mathrm{d}x$ として計算 (ϵ は正の実数) したのちに、$\epsilon \to 0$ とすることによって、$I = -1$ を示せ。

(1-2) 区分求積法によって積分区間を N 等分し、積分 I を近似したものを I_N とする。（図中、赤い長方形の面積の和にマイナスをつけたもの）。I_N を計算せよ。



(1-3) $\lim_{N\to\infty} I_N = I = -1$ より、Stirling の公式 (1) を示せ。（大雑把な議論でよい）

$\boxed{\text{問題 2}}$ [ガンマ関数]

正の実数 t に対し、ガンマ関数 $\Gamma(t)$ を

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x \tag{3}$$

で定義する。

(2-1) 漸化式 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を示せ。

(2-2) 自然数 n に対し、$\Gamma(n) = (n-1)!$ を示せ。

(2-3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、積分

$$J_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} \mathrm{d}x \tag{4}$$

をガンマ関数を使って表せ。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [Gauss 積分]

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、積分 J_n を問題 2 の式 (4) で定義する。

(3-1) Gauss の積分公式

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{5}$$

を示せ。
（ヒント：$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x\right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} \mathrm{d}y\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, e^{-(x^2+y^2)}$ として極座標に変換）

(3-2) 問題 2 の結果と合わせて、$J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4$ の値を具体的に計算せよ。