解析力学　レポート3

2020 年 12 月 15 日 (火) 出題　　担当：佐藤 純

問題 1 Lagrangian

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}^2 + \cos q \tag{1}$$

で記述される力学系を考える．

(1-1) Euler-Lagrange 方程式を書け．

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\sin q, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\ddot{q} \tag{2}$$

より，

$$2\ddot{q} = -\sin q \tag{3}$$

(1-2) Hamiltonian $H(q, p)$ を構成せよ．

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q}, \quad \dot{q} = \frac{1}{2}p \tag{4}$$

より，

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - L = p\left(\frac{1}{2}p\right) - \left[\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + \cos q\right] \\ &= \frac{1}{4}p^2 - \cos q \end{aligned} \tag{5}$$

(1-3) 正準方程式を書き，(1-1) の結果と等価であることを確認せよ．

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{1}{2}p \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\sin q \end{cases} \tag{6}$$

より，

$$2\ddot{q} = \dot{p} = -\sin q \tag{7}$$

問題 2 3 次元空間を 1 粒子が運動している．粒子の位置ベクトルを $\vec{r} = (q_1, q_2, q_3)$，運動量を $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ とする．物理量 $A(q_i, p_i), B(q_i, p_i)$ の Poisson かっこは

$$\{A, B\} := \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial A}{\partial q}_i \frac{\partial B}{\partial p}_i - \frac{\partial B}{\partial q}_i \frac{\partial A}{\partial p}_i \right) \tag{8}$$

で定義される．

(2-1) 正準関係式

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \text{for} \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{9}$$

を示せ．ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \sum_{k=1}^{3} (\delta_{ik}\delta_{jk} - 0 \cdot 0) = \delta_{ij} \tag{10}$$

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \sum_{k=1}^{3} (\delta_{ik} \cdot 0 - \delta_{jk} \cdot 0) = 0 \tag{11}$$

$$\{p_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \right) = \sum_{k=1}^{3} (0 \cdot \delta_{jk} - 0 \cdot \delta_{ik}) = 0 \tag{12}$$

(2-2) 粒子の角運動量は $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ と書かれる．$\{L_1, L_2\} = L_3$ が成り立つことを示せ．

角運動量の成分表示は

$$\begin{aligned} L_1 &= q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ L_2 &= q_3 p_1 - q_1 p_3 \\ L_3 &= q_1 p_2 - q_2 p_1 \end{aligned} \tag{13}$$

である．前問で示した正準関係式と，Poisson 括弧の双線形性および Leibnitz 則

$$\begin{aligned} \{A, BC\} &= \{A, B\}C + B\{A, C\}, \\ \{AB, C\} &= \{A, C\}B + A\{B, C\} \end{aligned} \tag{14}$$

を用いて，

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \{q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3\} \\ &= \{q_2 p_3, q_3 p_1\} - \{q_2 p_3, q_1 p_3\} - \{q_3 p_2, q_3 p_1\} + \{q_3 p_2, q_1 p_3\} \\ &= q_2\{p_3, q_3\}p_1 - 0 - 0 + q_1\{q_3, p_3\}p_2 \\ &= q_1 p_2 - q_2 p_1 = L_3 \end{aligned} \tag{15}$$

を得る．

問題 3 Hamiltonian $H(q,p)$ で記述される系に，母関数

$$G(q,Q) = \frac{1}{2}\cot\theta\left(q^2 + Q^2\right) - \frac{1}{\sin\theta}qQ \tag{16}$$

による正準変換を施す．

(3-1) 具体的な変換式

$$Q = Q(q,p) \tag{17}$$
$$P = P(q,p) \tag{18}$$

を書き下せ．

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = q\cot\theta - \frac{Q}{\sin\theta}, \tag{19}$$
$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q} = -Q\cot\theta + \frac{q}{\sin\theta} \tag{20}$$

式 (19) を Q について解いて，

$$Q = q\cos\theta - p\sin\theta. \tag{21}$$

これを式 (20) に代入して，

$$\begin{aligned} P &= -(q\cos\theta - p\sin\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{q}{\sin\theta} \\ &= -q\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + p\cos\theta + \frac{q}{\sin\theta} \\ &= q\sin\theta + p\cos\theta \end{aligned} \tag{22}$$

を得る．

$$\begin{cases} Q(q,p) = q\cos\theta - p\sin\theta \\ P(q,p) = q\sin\theta + p\cos\theta \end{cases} \tag{23}$$

(3-2) 変数変換の Jacobi 行列 J を計算し，$\det J = 1$ を確かめよ．

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{24}$$

より，

$$\begin{aligned} \det J &= \cos\theta\cdot\cos\theta - (-\sin\theta)\sin\theta \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1 \end{aligned} \tag{25}$$