解析力学　レポート3

2020年12月15日(火)出題　　担当：佐藤 純

問題1 Lagrangian

$$L(q,\dot{q}) = \dot{q}^2 + \cos q \tag{1}$$

で記述される力学系を考える．

(1-1) Euler-Lagrange 方程式を書け．

(1-2) Hamiltonian $H(q,p)$ を構成せよ．

(1-3) 正準方程式を書き，(1-1) の結果と等価であることを確認せよ．

問題2 3次元空間を1粒子が運動している．粒子の位置ベクトルを $\vec{r} = (q_1, q_2, q_3)$，運動量を $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ とする．物理量 $A(q_i, p_i), B(q_i, p_i)$ の Poisson かっこは

$$\{A, B\} := \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial A}{\partial q}_i \frac{\partial B}{\partial p}_i - \frac{\partial B}{\partial q}_i \frac{\partial A}{\partial p}_i \right) \tag{2}$$

で定義される．

(2-1) 正準関係式

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \text{for} \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3}$$

を示せ．ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

(2-2) 粒子の角運動量は $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ と書かれる．$\{L_1, L_2\} = L_3$ が成り立つことを示せ．

問題3 Hamiltonian $H(q,p)$ で記述される系に，母関数

$$G(q,Q) = \frac{1}{2}\cot\theta\left(q^2 + Q^2\right) - \frac{1}{\sin\theta} qQ \tag{4}$$

による正準変換を施す．

(3-1) 具体的な変換式

$$Q = Q(q,p) \tag{5}$$
$$P = P(q,p) \tag{6}$$

を書き下せ．

(3-2) 変数変換の Jacobi 行列 J を計算し，$\det J = 1$ を確かめよ．

1. **Moodle に提出すること．Moodle に問題があった場合にはメール添付でもよい．**
2. **2021年1月12日（火）の23:00を提出期限とする．**
3. **文献を調べたり人と共同作業をしてもよいが，丸写しせず，最終的には自分の言葉で書くこと．**