解析力学　レポート2

2020 年 11 月 17 日 (火) 出題　　担当：佐藤 純

問題 1　質量 m の粒子がポテンシャル $V(\vec{r})$ 中を運動している．ポテンシャルはある特定の方向 $\vec{a}$ に並進対称性を持っているとする．すなわち，任意の実数 t に対し，

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r} + t\vec{a}) \tag{1}$$

が成り立つとする．粒子の位置ベクトル $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を力学変数として，系の Lagrangian は

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2 + V(x_1, x_2, x_3) \tag{2}$$

と書ける．このとき，ネーターの定理により，このポテンシャルの対称性に付随する保存量を求めよ．

ϵ を正の無限小パラメータとして，$\vec{a}$ 方向への無限小並進操作

$$\vec{r} \to \vec{r} + \epsilon\vec{a} \tag{3}$$

を考える．この操作で Lagrangian が $L \to L + \dot{G}$ と変換すれば運動方程式は不変となり，系はこの操作に対する対称性を持つ．今の場合，$V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \epsilon\vec{a})$ および $\dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}$ が成り立つので，$L \to L$ であり，$G = 0$ である．
$\vec{a}$ の成分を $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ として成分をあらわに書けば

$$\begin{aligned} x_1 &\to x_1 + \epsilon a_1 \\ x_2 &\to x_2 + \epsilon a_2 \\ x_3 &\to x_3 + \epsilon a_3 \end{aligned} \tag{4}$$

であり，系の対称性に付随する保存量は Noether の定理より

$$Q = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}a_i = \sum_{i=1}^{3} m\dot{x}_i a_i = \sum_{i=1}^{3} P_i a_i = \overrightarrow{P} \cdot \vec{a} \tag{5}$$

となる．ここで，粒子の運動量を $\overrightarrow{P}$ と書いた．すなわち，運動量 $\overrightarrow{P}$ の $\vec{a}$ 方向成分が保存する．

問題 2 両端での座標 $q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$ を固定するという条件の下で変分

$$q_i \to q_i + \delta q_i \tag{6}$$
$$p_i \to p_i + \delta p_i \tag{7}$$

を取った時，作用

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i) \right] \mathrm{d}t \tag{8}$$

の変分がゼロになるという条件から，Hamilton の正準方程式を導け．

作用 S の変分 δS を計算すると，

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(p_i \dot{q}_i\right) - \delta H(q_i, p_i) \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[(\delta p_i)\dot{q}_i + p_i(\delta \dot{q}_i) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right) \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{q}_i \delta p_i + p_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right) \right] \mathrm{d}t \\
&= \left[p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i \right) \delta q_i - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right) \right] \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで，最後の式変形では部分積分を行った．ここで，両端で δq_i はゼロなので第一項は消え，

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] \mathrm{d}t \tag{10}$$

を得る．これが任意の $\delta q_i, \delta p_i$ に対して成り立つための条件として

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{11}$$

を得る．