解析力学　レポート 1

2020 年 10 月 20 日 (火) 出題　　担当：佐藤 純

問題 1 t の関数 $x(t)$ を区間 $t_1 \le t \le t_2$ で考える．
区間の両端 $x(t_1)$ と $x(t_2)$ を固定するという条件の下で，汎関数

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) \mathrm{d}t \tag{1}$$

を最小にするという条件から，Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2}$$

を導け．

変分 $x \to x + \delta x$ をとる．$\dot{x} \to \dot{x} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$ に注意して，作用の変分を計算すると

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(x, \dot{x}) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x\right) \right] \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3}$$

となる．第二項を部分積分すると，

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x\right) \mathrm{d}t &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x \mathrm{d}t \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4}$$

となる．ここで，両端を固定するという条件

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 \tag{5}$$

より，境界項は消えることを使った．したがって，

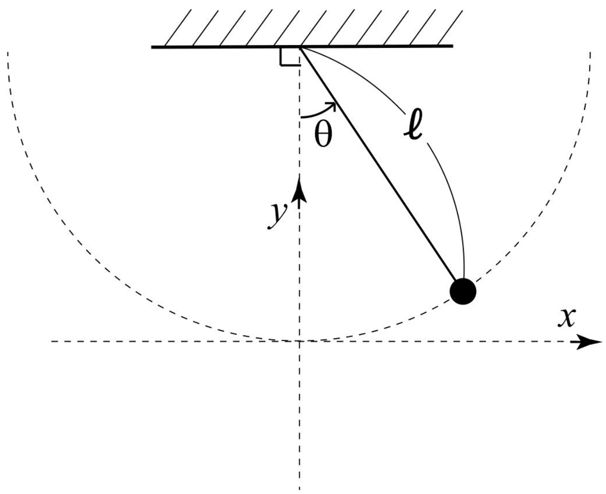
$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x \right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right] \delta x \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6}$$

を得る．これが任意の関数 $\delta x(t)$ に対してゼロになる条件として，

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{7}$$

を得る．

問題 2 単振り子の Lagrangian を書き下し，Euler-Lagrange 方程式を導け．



系の力学変数を $\theta(t)$ とする．おもりの速度は $\ell\dot{\theta}$，おもりの最下点からの高さは $\ell - \ell\cos\theta$ と書けるので，系の Lagrangian は

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell(1-\cos\theta) \tag{8}$$

と書ける．したがって，Euler-Lagrange 方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -mg\ell\sin\theta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\ell^2\dot{\theta}\right) \\ &= -mg\ell\sin\theta - m\ell^2\ddot{\theta} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

より，

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{10}$$

となる．