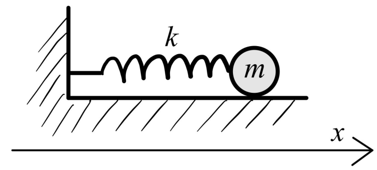
解析力学　期末レポート解答

2021 年 1 月 19 日 (火) 出題　担当：佐藤 純

テーブルの上にバネ定数 $k=2$ のバネがある．バネの左端は壁に固定され，右端は質量 $m=2$ のオモリが固定されている．以下，摩擦，空気抵抗などは無視して，オモリの 1 次元運動を考える．



問題 1　【Lagrange 形式】

(1-1) バネの伸び x を力学変数として，Lagrangian $L(x,\dot{x})$ を書け．

$$L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2=\dot{x}^2-x^2$$

(1-2) Euler-Lagrange 方程式を書き，その一般解を求めよ．

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=-2x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x})=-2(\ddot{x}+x)=0\Leftrightarrow \ddot{x}+x=0$$

一般解は，A, B を積分定数として，

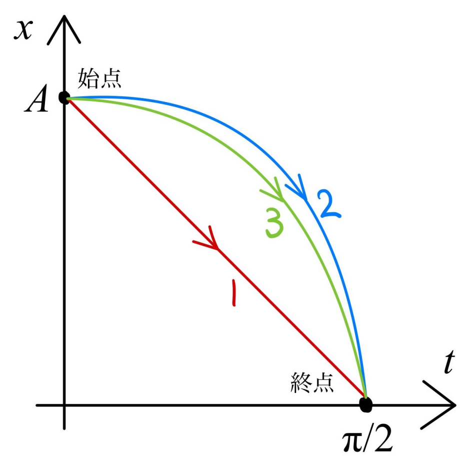
$$x(t)=A\cos t+B\sin t$$

問題 2　【最小作用の原理と量子力学】

オモリを引っ張ってバネを $x=A$ だけ伸ばし，時刻 $t=0$ に手を離したところ，時刻 $t=\pi/2$ にオモリはつり合いの位置 $x=0$ を通過した．これらの条件

$$x(0)=A,\quad x(\pi/2)=0 \qquad (1)$$

を満たす以下の 3 つの経路を考える．



(2-1) 経路 1：直線経路 $x(t)=A\left(1-\frac{2}{\pi}t\right)$ の場合に，作用 S_1 を計算せよ．

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_0^{\pi/2}L(x,\dot{x})\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2-x^2)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi/2}\left[\left(-A\frac{2}{\pi}\right)^2-\left\{A\left(1-\frac{2}{\pi}t\right)\right\}^2\right]\mathrm{d}t\\
&=A^2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

(2-2) 経路 2：放物線経路 $x(t) = A\left(1-\left(\frac{2}{\pi}t\right)^2\right)$ の場合に，作用 S_2 を計算せよ．

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^{\pi/2} L(x,\dot{x})\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\left\{-2A\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 t\right\}^2 - \left\{A\left(1-\left(\frac{2}{\pi}t\right)^2\right)\right\}^2\right]\mathrm{d}t \\
&= A^2\left(\frac{8}{3\pi} - \frac{4\pi}{15}\right)
\end{aligned}
$$

(2-3) 経路 3：余弦経路 $x(t) = A\cos t$ の場合に，作用 S_3 を計算せよ．

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \int_0^{\pi/2} L(x,\dot{x})\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\mathrm{d}t \\
&= A^2 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t - \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

(2-4) S_1, S_2, S_3 の大小関係を比較し，その結果が意味することを一言述べよ．

$$
\begin{aligned}
&S_1/A^2 \sim \frac{2}{3} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6} = 0.1666\cdots \\
&S_2/A^2 \sim \frac{8}{3\cdot 3} - \frac{4\cdot 3}{15} = \frac{4}{45} = 0.0888\cdots \\
&S_3 = 0.
\end{aligned}
$$

最小作用の原理より，運動方程式の解である経路 3 の作用 S_3 が最小となっている．経路 2 の方が経路 1 より運動方程式の解により近いので，作用の値も最小値に近い．

問題 3 【Hamilton-Jacobi の理論】

(3-1) 系の Hamiltonian $H(x,p)$ と正準方程式を書け．

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$ より，$\dot{x} = \frac{1}{2}p$ を用いて，

$$
H(x,p) = p\dot{x} - L = p\left(\frac{1}{2}p\right) - \left[\left(\frac{1}{2}p\right)^2 - x^2\right] = \frac{1}{4}p^2 + x^2
$$

(3-2) Hamilton の主関数 $\bar{S}(x,t)$ が満たすべき Hamilton-Jacobi 方程式を書け．

$$
-\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial \bar{S}}{\partial x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x}\right)^2 + x^2
$$

(3-3) Hamilton-Jacobi 方程式の解は，$f(x)=\int_x^1 \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y \quad (-1\le x\le 1)$ を用いて

$$\bar{S}(x,t)=2A^2 f\left(\frac{x}{A}\right)-A^2 t \tag{2}$$

と書けることを示せ．ただし，A は振動の振幅を表す積分定数である．

$$左辺=-\frac{\partial\bar{S}}{\partial t}=A^2,$$

右辺は，$f'(x)=-\sqrt{1-x^2}$ を用いて，

$$\frac{\partial\bar{S}}{\partial x}=2A^2 f'\left(\frac{x}{A}\right)\cdot\frac{1}{A}=-2A\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}=-2\sqrt{A^2-x^2}$$

より，

$$右辺=\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{A^2-x^2}\right)^2+x^2=A^2=左辺$$

(3-4) この式 (2) に問題 2 の始点と終点を代入し，問題 2 の結果と比較考察せよ．

- 始点：$(x,t)=(A,0)$

$$\bar{S}(A,0)=2A^2 f(1)=0$$

終点として始点を選べば作用の値は当然ゼロとなる．

- 終点：$(x,t)=(0,\pi/2)$

$$\bar{S}(0,\pi/2)=2A^2 f(0)-A^2\frac{\pi}{2}=2A^2\frac{\pi}{4}-A^2\frac{\pi}{2}=0$$

経路として運動方程式の解を選んだ場合の作用の値 S_3 に等しい．

(3-5) 式 (2) において，積分定数 A を新しい力学変数 P と読み替えることによって正準変換の母関数 $W(x,P,t)$ を構成し，新しい Hamiltonian がゼロになることを確認せよ．

$W(x,P,t)=2P^2 f\left(\frac{x}{P}\right)-P^2 t$ より，

$$\begin{cases}
p=\dfrac{\partial W}{\partial x}=2P^2 f'\left(\dfrac{x}{P}\right)\cdot\dfrac{1}{P}=2Pf'\left(\dfrac{x}{P}\right)=-2\sqrt{P^2-x^2} \\
Q=\dfrac{\partial W}{\partial P}=4Pf\left(\dfrac{x}{P}\right)+2P^2 f'\left(\dfrac{x}{P}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{P^2}\right)-2Pt \\
\qquad =4Pf\left(\dfrac{x}{P}\right)+2x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{P^2}}-2Pt \\
K=H+\dfrac{\partial W}{\partial t}=\left(\dfrac{1}{4}p^2+x^2\right)-P^2=\dfrac{1}{4}\left(-2\sqrt{P^2-x^2}\right)^2+x^2-P^2=0
\end{cases}$$

すなわち，新しいハミルトニアン K はゼロとなる．

(3-6) 正準変換された新しい力学変数 Q, P は全て定数となる．定数を適当に選ぶことにより，運動方程式の解 (問題 2 の経路 3) が得られることを確認せよ．

α, β を定数として $P = \alpha,\ Q = \beta$ とおくと，

$$\beta = 4\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} - 2\alpha t.$$

ここで，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\cos^{-1}x}^0 \sin\theta(-\sin\theta\mathrm{d}\theta) \quad (y = \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi) \\
&= \int_0^{\cos^{-1}x} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\cos^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
\beta &= 4\alpha\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{2\alpha}\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\right) + 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} - 2\alpha t \\
&= 2\alpha\cos^{-1}\frac{x}{\alpha} - 2\alpha t \\
\Leftrightarrow x &= \alpha\cos\left(t + \frac{\beta}{2\alpha}\right)
\end{aligned}$$

を得る．ここで，定数として $\alpha = A,\ \beta = 0$ を選べば，問題 2 の初期条件に合致した解 $x = A\cos t$ が得られる．