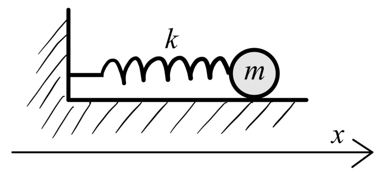
解析力学　期末レポート

2021年1月19日(火)出題　　担当：佐藤 純

テーブルの上にバネ定数 $k = 2$ のバネがある．バネの左端は壁に固定され，右端は質量 $m = 2$ のオモリが固定されている．以下，摩擦，空気抵抗などは無視して，オモリの1次元運動を考える．



問題1　【Lagrange形式】

(1-1) バネの伸び x を力学変数として，Lagrangian $L(x, \dot{x})$ を書け．

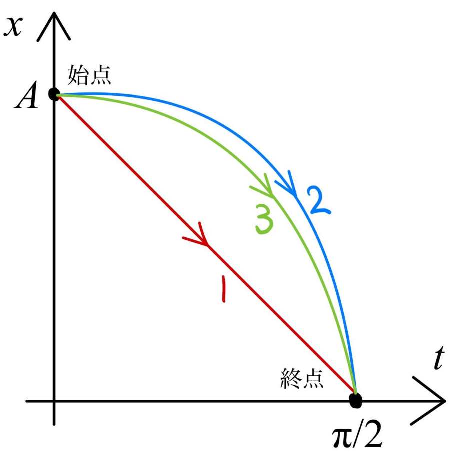
(1-2) Euler-Lagrange 方程式を書き，その一般解を求めよ．

問題2　【最小作用の原理と量子力学】

オモリを引っ張ってバネを $x = A$ だけ伸ばし，時刻 $t = 0$ に手を離したところ，時刻 $t = \pi/2$ にオモリはつり合いの位置 $x = 0$ を通過した．これらの条件

$$x(0) = A, \quad x(\pi/2) = 0 \tag{1}$$

を満たす以下の 3 つの経路を考える．



(2-1) 経路1：直線経路 $x(t) = A\left(1 - \frac{2}{\pi}t\right)$ の場合に，作用 S_1 を計算せよ．

(2-2) 経路2：放物線経路 $x(t) = A\left(1 - \left(\frac{2}{\pi}t\right)^2\right)$ の場合に，作用 S_2 を計算せよ．

(2-3) 経路3：余弦経路 $x(t) = A\cos t$ の場合に，作用 S_3 を計算せよ．

(2-4) S_1, S_2, S_3 の大小関係を比較し，その結果が意味することを一言述べよ．

問題3　【Hamilton-Jacobiの理論】

(3-1) 系の Hamiltonian $H(x, p)$ と正準方程式を書け．

(3-2) Hamilton の主関数 $\bar{S}(x, t)$ が満たすべき Hamilton-Jacobi 方程式を書け．

(3-3) Hamilton-Jacobi 方程式の解は，$f(x) = \int_x^1 \sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}y \quad (-1 \leq x \leq 1)$ を用いて

$$\bar{S}(x, t) = 2A^2 f\left(\frac{x}{A}\right) - A^2 t \tag{2}$$

と書けることを示せ．ただし，A は振動の振幅を表す積分定数である．

(3-4) この式(2)に問題2の始点と終点を代入し，問題2の結果と比較考察せよ．

(3-5) 式(2)において，積分定数 A を新しい力学変数 P と読み替えることによって正準変換の母関数 $W(x, P, t)$ を構成し，新しい Hamiltonian がゼロになることを確認せよ．

(3-6) 正準変換された新しい力学変数 Q, P は全て定数となる．定数を適当に選ぶことにより，運動方程式の解(問題2の経路3)が得られることを確認せよ．