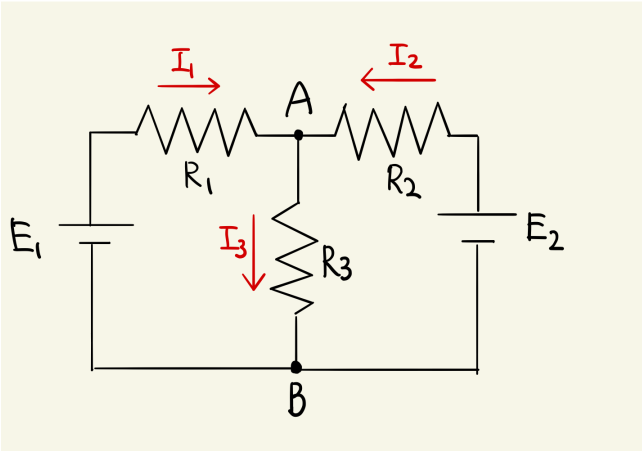
物理学入門　第12回　直流回路

2020年7月31日　　担当：佐藤 純

問題1 電気抵抗が R_1, R_2, R_3 の3つの抵抗と，起電力が E_1, E_2 の2つの電源を下図のように接続して回路を組んだ．抵抗 R_1, R_2, R_3 を流れる電流を下図の向きに I_1, I_2, I_3 とする．



(1-1) キルヒホッフの第一法則を用いて，I_1, I_2, I_3 の間に成り立つ関係式を書け．

$$\boxed{I_1 + I_2 = I_3}$$

(1-2) キルヒホッフの第二法則を用いて，I_1, I_2, I_3 R_1, R_2, R_3, E_1, E_2 の間に成り立つ関係式を2つ書け．

Aから左に出発してBを通ってAに戻る閉回路を考えると，

$$\boxed{+I_1R_1 - E_1 + I_3R_3 = 0}$$

Aから右に出発してBを通ってAに戻る閉回路を考えると，

$$\boxed{+I_2R_2 - E_2 + I_3R_3 = 0}$$

(1-3) $R_1 = 2[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$, $R_3 = 4[\Omega]$, $E_1 = 2[\mathrm{V}]$, $E_2 = 4[\mathrm{V}]$ のとき，抵抗 R_1, R_2, R_3 を流れる電流の大きさと向きを求めよ．

問題の数値を上の2式に代入すると，

$$2I_1 - 2 + 4I_3 = 0, \quad 2I_2 - 4 + 4I_3 = 0$$

より，

$$I_1 = 1 - 2I_3, \quad I_2 = 2 - 2I_3$$

となる．これを $I_1 + I_2 = I_3$ に代入して，

$$I_3 = (1 - 2I_3) + (2 - 2I_3) = 3 - 4I_3$$

より，

$$5I_3 = 3, \quad I_3 = 0.6.$$

$$I_1 = 1 - 2 \times 0.6 = -0.2.$$

$$I_2 = 2 - 2 \times 0.6 = 0.8.$$

I_1 だけ負になったので，図の向きと逆になる．

$$\boxed{R_1 : \text{右から左に}\ 0.2[\mathrm{A}], \quad R_2 : \text{右から左に}\ 0.8[\mathrm{A}], \quad R_3 : \text{上から下に}\ 0.6[\mathrm{A}]}$$

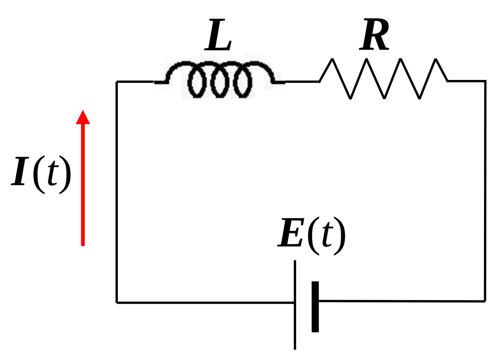
(1-4) 点 B に対する点 A の電位を求めよ．

B から A に進むとき，流れに逆上って進むので，電位は上がる．

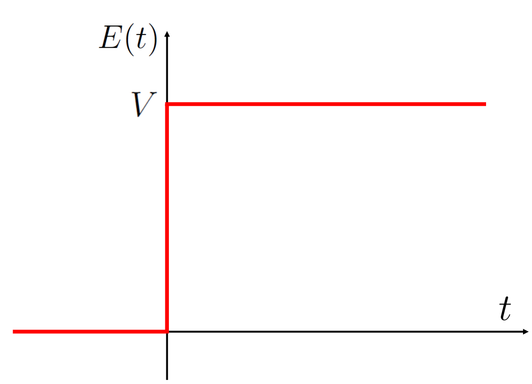
$V = +I_3R_3 = 0.6 \times 4 = \boxed{2.4[\mathrm{V}]}$

問題 2 自己インダクタンス L のコイルと抵抗 R を直列につないだ回路に，時刻 t における起電力が $E(t)$ で与えられる電源をつなぐ．時刻 t にこの回路に流れる電流を図の向きに $I(t)$ とする．最初，電源はオフになっており，$t < 0$ では $E(t) = I(t) = 0$ とする．

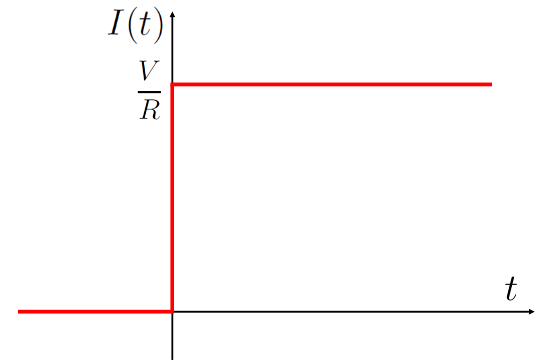
時刻 $t = 0$ に電源をオンにして起電力 V(=定数) を与えた．



(2-1) 回路の起電力 $E(t)$ のグラフを描け．



(2-2) $L = 0$ のとき，回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け．



(2-3) $L > 0$ のとき，コイルに発生する誘導起電力の大きさを求めよ．

$$L\dot{I}$$

(2-4) $I(t)$ に対する微分方程式を書け．

$$V = L\dot{I} + IR$$

(2-5) 初期条件 $I(0)$ を書け．

$$I(0) = 0$$

(2-6) この初期条件のもとに微分方程式を解き，$I(t)$ を求めよ．

$$L\dot{I} = V - IR = -R\left(I - \frac{V}{R}\right),$$
$$\dot{I} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{V}{R}\right),$$

ここで，$x = I - V/R$ とおくと，V/R は定数なので $\dot{x} = \dot{I}$ より，

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x,$$
$$x(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$
$$I(t) = x(t) + \frac{V}{R} = \frac{V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

となる．初期条件 $I(0) = 0$ より，

$$0 = \frac{V}{R} + A$$

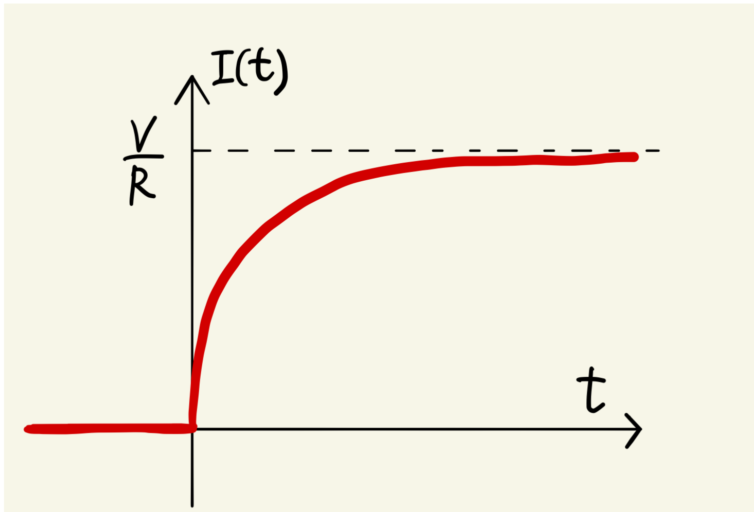
なので，

$$A = -\frac{V}{R}.$$

したがって，

$$\boxed{I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

(2-7) $L > 0$ のとき，回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描き，結果の物理的意味を述べよ．



スイッチを入れても電流値は即座に反応せず，応答に遅れが生じている．しかし，十分な時間が経過後には，コイルがないときの電流値に収束している．