物理学入門　第11回　電位と電気容量

2020年7月24日　　担当：佐藤 純

問題1 x 軸原点に電荷 q がある．

(1-1) テスト電荷 q_t を，$x=a$ から $x=b$ まで運ぶのに必要な仕事 $W(a \to b)$ を求めよ．ただし，$0<b<a$ とする．

クーロン力 $\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ に逆らって人間が加えなければならない力は，$-\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ である．したがって，

$$W(a \to b) = \int_a^b -\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x^2}\mathrm{d}x = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x}\right]_a^b = \boxed{\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$$

(1-2) このとき，テスト電荷は仕事 W をされることによって，ポテンシャルエネルギーを蓄える．位置 x におけるポテンシャルエネルギーを $U(x)$ とするとき，$U(b)-U(a)$ を求めよ．

仕事をしてもらったことによって獲得したポテンシャルエネルギーは，

$$U(b)-U(a) = W(a \to b) = \boxed{\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$$

である．

(1-3) ポテンシャルの基準点を $x=a$ に選ぶ．すなわち，$U(a)=0$ とする．

このとき，位置 x におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ．

上式に $U(a)=0$ を代入して，

$$U(b) = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

を得る．ここで，b を x に書き換えて，

$$\boxed{U(x) = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)}$$

を得る．

(1-4) ポテンシャルの基準点を無限遠点 $x=\infty$ に選んだときの，位置 x におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ．

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} = 0$$

より，

$$\boxed{U(x) = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

を得る．

(1-5) 前問で求めたポテンシャルエネルギーを，テスト電荷 q_t で割ったもの $\phi(x)=U(x)/q_t$ を “電位” と呼ぶ．原点の電荷 q が位置 x に作る電位 $\phi(x)$ を求めよ．

$$\boxed{\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

を得る．

(1-6) 位置 x における電場 $E(x)$ は，電位 $\phi(x)$ を微分することによって

$$E(x) = -\phi'(x)$$

と書けることを確認せよ．

$$-\phi'(x) = -\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}\right)' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = E(x)$$

(1-7) 同様にして，3 次元の場合には，$\vec{r}$ の位置における電位 $\phi(\vec{r})$ は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

と書ける．ただし，$r = |\vec{r}|$ は原点からの距離を表す．

$\vec{r}$ の位置における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi$$

と書けることを示せ．ただし，

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

である．

$\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．

まず，以下の微分式が成り立つことに注意．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},
\end{aligned}$$

同様に $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$ が成り立つ．これを用いて，

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

同様に，　$\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{y}{r^3}$，　$\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{z}{r^3}$　を得る．以上により，

$$-\overrightarrow{\nabla}\phi = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{pmatrix} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r} \end{pmatrix} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} -\dfrac{x}{r^3} \\ -\dfrac{y}{r^3} \\ -\dfrac{z}{r^3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} = \overrightarrow{E}.$$

を得る．

問題 2 以下のコンデンサーの電気容量を求めよ．

(2-1) 平行平板コンデンサー (面積 S，間隔 d)

$z = 0$ の平板に電荷 $+Q$，$z = d$ の平板に電荷 $-Q$ があるとする．平板の電荷密度は $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ なので，平板間の電場は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

である (第 11 回の演習問題参照)．

電場は $z = 0$ の平板から発生し，$z = d$ の平板に向かっている．したがって，$z = 0$ の電位 $\phi(0)$ の方が $z = d$ の電位 $\phi(d)$ よりも高い (正電荷を電場中に置くと，電位の高い方から低い方へと移動する)．その電位差を V とする．すなわち，

$$V = \phi(0) - \phi(d)$$

である．

この電位差は，$q = 1$ のテスト電荷を $z = d$ から $z = 0$ まで電場に逆らって (人間が) 運ぶのに必要な仕事 $W(d \to 0)$ に等しい (テスト電荷は人間から仕事 $W(d \to 0)$ をしてもらうことにより，その分ポテンシャルが増加する)．

z における電場を $E(z)$ とすると，それに逆らって人間が加えなければならない力は $-E(z)$ である (負符号に注意！)．

以上により，平板間の電位差 V は

$$V = \phi(0) - \phi(d) = W(d \to 0) = \int_d^0 -E(z)\mathrm{d}z = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

となる．これを Q について解くと

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d}V$$

なので，$Q=CV$ より電気容量 C は

$$\boxed{C=\frac{\epsilon_0 S}{d}}$$

となる．

(2-2) 同心球殻コンデンサー (半径 a,b)

半径 a の球殻に電荷 $+Q$，半径 b の球殻に電荷 $-Q$ があるとする ($a<b$ とする)．半径 r $(a<r<b)$ の球面 S で半径 a の球殻を包むと，その内部の全電荷量は Q，S の表面積は $4\pi r^2$ なので，ガウスの定理より

$$E(r)4\pi r^2=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

が成り立つので，

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

を得る．前問と同じ考え方により，球殻間の電位差は

$$\begin{aligned}
V=\phi(a)-\phi(b)=W(b\to a)&=\int_b^a -E(r)\mathrm{d}r\\
&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a\left(-\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right)\\
&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a\\
&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\\
&=\frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab}
\end{aligned}$$

なので，$Q=CV$ より電気容量 C は

$$\boxed{C=\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}}$$

となる．

(2-3) 同軸円筒コンデンサー (半径 a,b，長さ ℓ)

半径 a の円筒に電荷 $+Q$，半径 b の円筒に電荷 $-Q$ があるとする ($a<b$ とする)．半径 r $(a<r<b)$ の円筒 S で半径 a の円筒を包むと，その内部の全電荷量は Q，S の側面積は $2\pi r\ell$ なので，ガウスの定理より

$$E(r)2\pi r\ell=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

が成り立つので，

$$E(r)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r\ell}$$

を得る．前問と同じ考え方により，球殻間の電位差は

$$
\begin{aligned}
V = \phi(a) - \phi(b) = W(b \to a) &= \int_b^a -E(r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\int_b^a \left(-\frac{\mathrm{d}r}{r}\right) \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\left[-\log r\right]_b^a \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\log\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

なので，$Q = CV$ より電気容量 C は

$$
\boxed{C = 2\pi\epsilon_0\ell\left(\log\frac{b}{a}\right)^{-1}}
$$

となる．