物理学入門　第9回　ガウスの法則

2020年7月10日　担当：佐藤 純

問題1 3次元空間の原点 $O=(0,0,0)$ に，電荷 q がある．ただし，$q>0$ とする．

(1-1) 点 $P=(x,y,z)$ における電場ベクトル $\overrightarrow{E}$ を求めよ．

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

(1-2) 点 $P=(x,y,z)$ における電場ベクトルはどの方向を向いているか？

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向

(1-3) 原点からの距離が r の点における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ．

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

問題2 半径 a の球内全体に，電荷 q が一様に分布している．
球の中心を原点として，xyz 軸をとる．ただし，$a>0, q>0$ とする．

(2-1) 球内の単位体積あたりの電荷密度 ρ を求めよ．

$$\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}=\boxed{\frac{3q}{4\pi a^3}}$$

(2-2) 点 $P=(x,y,z)$ における電場ベクトルはどの方向を向いているか？

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向

(2-3) 原点からの距離が r の点における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ．
(球の内部 $(r<a)$ と外部 $(r>a)$ で場合分けせよ)

半径 r の球面 S で取り囲んで，ガウスの定理

$$\int_S \overrightarrow{E}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

を適用する．左辺は，電場の強さに S の全面積をかけて，

$$\int_S \overrightarrow{E}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=E(r)4\pi r^2$$

となる．球面 S 内の全電荷 Q は，

$$Q=\begin{cases} q & (r>a)\\ \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3=q\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & (r<a)\end{cases}$$

である．したがってガウスの定理より，

$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{q}{\epsilon_0} & (r > a) \\ \dfrac{q}{\epsilon_0}\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & (r < a) \end{cases}$$

なので，

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \\ \dfrac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} & (r < a) \end{cases}$$

を得る．

(2-4) 問題 (1-3) の解答と比較せよ．

球の外部では，原点に全電荷 q が集中している場合の電場に等しい．つまり，原点の点電荷 q が作る電場に等しい．

問題 3 z 軸を中心軸として，z 軸に沿って無限に長い円柱がある．円柱の断面の円の半径を a とする．円柱内 $(x^2 + y^2 < a^2, -\infty < z < \infty)$ に，単位体積当たり ρ の電荷密度が分布している．ただし，$a > 0, \rho > 0$ とする．

(3-1) 点 $P = (x, y, z)$ における電場ベクトルはどの方向を向いているか？

z 軸から外向き方向，すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向

(3-2) z 軸からの距離が r の点における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ．

(円柱の内部 $(r < a)$ と外部 $(r > a)$ で場合分けせよ)

半径 r，高さ ℓ で，z 軸を中心軸とする円柱 S で取り囲んで，ガウスの定理

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

を適用する．左辺は，電場の強さ $E(r)$ に S の円柱の側面積をかけて，

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = E(r) 2\pi r\ell$$

となる．球面 S 内の全電荷 Q は，

$$Q = \begin{cases} \rho \cdot \pi a^2 \ell & (r > a) \\ \rho \cdot \pi r^2 \ell & (r < a) \end{cases}$$

である．したがってガウスの定理より，

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^2}{2r\epsilon_0} & (r > a) \\ \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0} & (r < a) \end{cases}$$

を得る．

(3-3) 前回の問題 (5-2) の解答と比較せよ．

円柱の外部では，z 軸上の線電荷が作る電場に等しい．

問題 4 xy 平面全体に単位面積当たり σ の電荷が分布している．ただし，$\sigma > 0$ とする．

(4-1) 点 $P = (x, y, z)$ における電場ベクトルはどの方向を向いているか？

(xy 平面の上 ($z > 0$) と下 ($z < 0$) で場合分けせよ)

$z > 0$ では上向き (z 軸正の向き），$z < 0$ では下向き (z 軸負の向き）

(4-2) 点 $P = (x, y, z)$ における電場ベクトル $\overrightarrow{E}(z)$ を求めよ．

((x, y) には依らないので $\overrightarrow{E}(x, y, z)$ を $\overrightarrow{E}(z)$ と書いた)

底面積 S，高さ $2z$(上面，底面が $\pm z$) で，z 軸を中心軸とする円柱 S で取り囲んで，ガウスの定理

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

を適用する．対称性より，$E(z) = -E(-z)$ である．ガウスの定理の左辺は，電場の強さ $E(z)$ に円柱の底面積をかけ，電場は上面と底面から曲面を貫くので 2 倍して，

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = 2SE(z)$$

となる．円柱内の全電荷は $Q = S\sigma$ である．したがってガウスの定理より，

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

を得る．(結果は z によらないことに注意)

問題 5 平面 $z = 0$ 全体に単位面積当たり σ，平面 $z = a$ 全体に単位面積当たり $-\sigma$ の電荷が分布している．ただし，$a > 0, \sigma > 0$ とする．

(5-1) 点 $P = (x, y, z)$ における電場ベクトルはどの方向を向いているか？

(z の範囲で適切に場合分けせよ)

前問で求めた電場を重ね合わせる．$z > a$ および $z < 0$ では電場がキャンセルして消える．$0 < z < a$ では上向きの電場がある．

(5-2) 点 $P = (x, y, z)$ における電場ベクトル $\overrightarrow{E}(z)$ を求めよ．

((x, y) には依らないので $\overrightarrow{E}(x, y, z)$ を $\overrightarrow{E}(z)$ と書いた)

前問で求めた電場の重ね合わせにより，

$$E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

を得る．(結果は z によらないことに注意)