物理学入門　第8回　クーロンの法則

2020年7月3日　担当：佐藤 純

問題1 以下の量を，有効数字1桁程度の大雑把な計算で求めよ．力の単位は [N] として求めよ．

(1-1) 体重 50kg の人が2人，1m 離れて立っているときに2人の間に働く万有引力の大きさ F_G を求めよ．ただし，万有引力定数を $G = 7 \times 10^{-11}[\mathrm{Nm^2kg^{-2}}]$ とする．

$$F = G\frac{m^2}{r^2} = 7 \times 10^{-11}\frac{50^2}{1^2}[\mathrm{N}] = \boxed{2 \times 10^{-7}[\mathrm{N}]}$$

(1-2) 1[C] の電荷が2つ，1m 離れて存在しているとき，これらの間に働くクーロン力の大きさ F_C を求めよ．ただし，$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9[\mathrm{Nm^2C^{-2}}]$ とする．

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = 9 \times 10^9\frac{1^2}{1^2}[\mathrm{N}] = \boxed{9 \times 10^9[\mathrm{N}]}$$

(1-3) F_C は F_G の何倍か．

$$\frac{9 \times 10^9}{2 \times 10^{-7}} = \boxed{5 \times 10^{16}[\mathrm{N}]}$$

問題2 x 軸上，$x = 0$ に電荷 q，$x = \ell$ に電荷 $-2q$ がある．ただし，$\ell > 0, q > 0$ とする．

(2-1) $x = 0$ の電荷 q は，どの向きにどれだけの力を受けるか．

異符号の電荷なので引き合う．$\boxed{\text{右向き (}x\text{ 軸正の向き) に，}\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0\ell^2}}$

(2-2) $x = \ell$ の電荷 $-2q$ は，どの向きにどれだけの力を受けるか．

$\boxed{\text{左向き (}x\text{ 軸負の向き) に，}\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0\ell^2}}$

問題3 xy 平面内の点 A:$(a, 0)$ に電荷 q，点 B:$(0, b)$ に電荷 q' がある．

(3-1) A の電荷が B の電荷に及ぼす力 $\overrightarrow{F}_1$ を求めよ．

$$\overrightarrow{F}_1 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\left|\overrightarrow{AB}\right|^3}\overrightarrow{AB} = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}-a \\ b\end{pmatrix}}$$

(3-2) 力 $\overrightarrow{F}_1$ の大きさ f_1 を求めよ．

$$f_1 = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)}}$$

(3-3) B の電荷が A の電荷に及ぼす力 $\overrightarrow{F}_2$ を求めよ．

$$\overrightarrow{F}_2 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 \left|\overrightarrow{BA}\right|^3}\overrightarrow{BA} = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}}$$

(3-4) 力 $\overrightarrow{F}_2$ の大きさ f_2 を求めよ．

$$f_2 = \boxed{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)}}$$

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ x 軸上，$x=0$ に電荷 q，$x=\ell$ に電荷 $4q$ がある．さらに，第三の電荷 q' を $x=x_0$ に置いたら，全ての電荷に働く力が打ち消しあってゼロになった．

(4-1) $x=x_0$ の電荷 q' が力を受けないという条件から，x_0 を求めよ．

$x=0,\ell$ の電荷は同符号なので，それらから受ける力が釣合うためには，それらの間になければならない．すなわち，

$$0 < x_0 < \ell$$

が成り立つ．力のつり合い条件は

$$\frac{q}{x_0^2} = \frac{4q}{(\ell - x_0)^2}$$

となる．ただし，クーロン力の比例定数は省略した．したがって，

$$4x_0^2 = (\ell - x_0)^2$$

$$2x_0 = \ell - x_0$$

$$\boxed{x_0 = \frac{\ell}{3}}$$

を得る．

(4-2) $x=0$ の電荷 q が力を受けないという条件から，q' を求めよ．

力のつり合い条件は

$$\frac{q'}{x_0^2} + \frac{4q}{\ell^2} = 0$$

となる．ただし，クーロン力の比例定数は省略した．したがって，

$$q' = -4q\left(\frac{x_0}{\ell}\right)^2 = \boxed{-\frac{4}{9}q}$$

を得る．

(4-3) $x=\ell$ の電荷 $4q$ が受ける合力を求め，ゼロになっていることを確認せよ．

$$\frac{4qq'}{(\ell - x_0)^2} + \frac{4q^2}{\ell^2} = \frac{-\frac{16}{9}q^2}{(\frac{2}{3}\ell)^2} + \frac{4q^2}{\ell^2} = 0$$

問題 5 y 軸上に線密度 ρ の線電荷が，$-\infty < y < \infty$ に一様に分布している．点 $(a, 0)$ に点電荷 q を置き，この線電荷から受ける力を調べる．ただし，ρ, a, q は全て正とする．

(5-1) 点電荷 q が，線電荷の微小部分 $y \sim y + \mathrm{d}y$ から受ける力 $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ を求めよ．

$y \sim y + \mathrm{d}y$ の部分にある電荷は $\rho \mathrm{d}y$ なので，点 $(0, y)$ に点電荷 $\rho \mathrm{d}y$ があるとして，点 $(a, 0)$ の点電荷 q が受ける力は

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \frac{q\rho \mathrm{d}y}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} a \\ -y \end{pmatrix}$$

となる．

(5-2) 点電荷 q が線電荷全体から受ける力 $\overrightarrow{F}$ を求めよ．ただし，$y = a \tan\theta$ として，θ で積分せよ．

上で求めた力を $-\infty < y < \infty$ で全て足し合わせて，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= \int \mathrm{d}\overrightarrow{F} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\rho \mathrm{d}y}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} a \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

$$y = a \tan\theta$$

とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= a(\tan\theta)'\mathrm{d}\theta \\ &= a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)'\mathrm{d}\theta \\ &= a\left[\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)' + (\sin\theta)'\frac{1}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\ &= a\left[\sin\theta\left(-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(\cos\theta)' + \cos\theta\frac{1}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\ &= a\left[\sin\theta\left(-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(-\sin\theta) + 1\right]\mathrm{d}\theta \\ &= a\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1\right)\mathrm{d}\theta \\ &= a\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

である．また，

$$a^2 + y^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2\left[1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2\right] \\
&= a^2\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{a^2}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} &= (a^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\cos^3\theta}{a^3}
\end{aligned}
$$

である．$\theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta : -\infty \to +\infty$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos^3\theta}{a^3}\frac{a}{\cos^2\theta}\begin{pmatrix} a \\ -a\tan\theta \end{pmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\begin{pmatrix} 1 \\ -\tan\theta \end{pmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0 a}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{q\rho}{2\pi\epsilon_0 a}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

を得る．