物理学入門　第7回　ベクトル

2020年6月26日　　担当：佐藤 純

$\boxed{\text{問題 1}}$ 以下のベクトル $\vec{a}$ の大きさと，その方向を向いた単位ベクトルを求めよ．

(1-1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

ベクトルの大きさは，$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

単位ベクトルは，元のベクトルを大きさで割って，$\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \boxed{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}$

(1-2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ベクトルの大きさは，$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{6}}$

単位ベクトルは，元のベクトルを大きさで割って，$\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{問題 2}}$ 3次元空間に3点 A:$(0, -1, -1)$, B:$(1, -2, 1)$, C:$(-1, 0, -1)$ がある．

(2-1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(2-2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさを求めよ．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{6}}$$

(2-3) A→B の方向を向いた単位ベクトルを求めよ．

単位ベクトルは，元のベクトルを大きさで割って，

$$\vec{e}_{\mathrm{AB}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

(2-4) B→C の方向を向いた単位ベクトルを求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

ベクトルの大きさは，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 2\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2} = 2\sqrt{3}$

$$\vec{e}_{\mathrm{BC}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}}$$

(2-5) 大きさが 3 で，A→B の方向を向いたベクトルを求めよ．

$$3\vec{e}_{\mathrm{AB}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

(2-6) 大きさが 6 で，C→B の方向を向いたベクトルを求めよ．

$$-6\vec{e}_{\mathrm{BC}} = \boxed{2\sqrt{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

問題 3 3 次元空間の点 P$=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ の位置ベクトルを $\vec{r}$, 原点からの距離を r とする．

(3-1) r を x, y, z を用いて表せ．

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(3-2) 位置ベクトル $\vec{r}$ の方向を向いた単位ベクトル $\vec{e}$ を，$r, \vec{r}$ を用いて表せ．

単位ベクトルを作るには，大きさで割ってやればよいから，$\boxed{\vec{e} = \dfrac{\vec{r}}{r}}$

(3-3) 点 P から原点に向かい，大きさが f のベクトル $\vec{F}$ を求めよ．

点 P から原点に向かう方向の単位ベクトルは $-\vec{e}$ である．
この方向で大きさが f であるから，$\vec{F} = f(-\vec{e}) = \boxed{-f\dfrac{\vec{r}}{r}}$

問題 4 3 次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を, O:$(0,0,0)$, A:$(1,-3,2)$, B:$(-1,1,-2)$ とする．ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める．

(4-1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を計算せよ．

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + (-3) \times 1 + 2 \times (-2) = -1 - 3 - 4 = \boxed{-8}$

(4-2) 点 B を通り，ベクトル $\vec{a}$ に平行な直線の方程式を求めよ．

直線上の任意の点を Q: (x, y, z) とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\vec{a}$$

と書ける．ここで，t は任意の実数である．したがって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1-3t \\ -2+2t \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned} x &= -1 + t, \\ y &= 1 - 3t, \\ z &= -2 + 2t \end{aligned}$$

となる．これから t を消去すれば求める直線の式になる．t について解くと，

$$t = x + 1 = -\frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

なので，求める直線の式は，

$$\boxed{x+1=-\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}}$$

となる．

(4-3) 点 B を通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な平面の方程式を求めよ．

求める平面上の任意の点を Q: (x,y,z) とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ はこの平面内にあるので，ベクトル $\vec{a}$ と常に直交している．よって，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$$

と書ける．ここで，

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z+2\end{pmatrix}$$

より，

$$0=(x+1)-3(y-1)+2(z+2)=x-3y+2z+8$$

となる．よって，求める平面の式は，

$$\boxed{x-3y+2z+8=0}$$

となる．

(4-4) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ．

求める平面上の任意の点を Q: (x,y,z) とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\vec{a},\vec{b}$ の線形結合で

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

と書ける．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

より，

$$x=\alpha-\beta,\quad y=-3\alpha+\beta,\quad z=2\alpha-2\beta$$

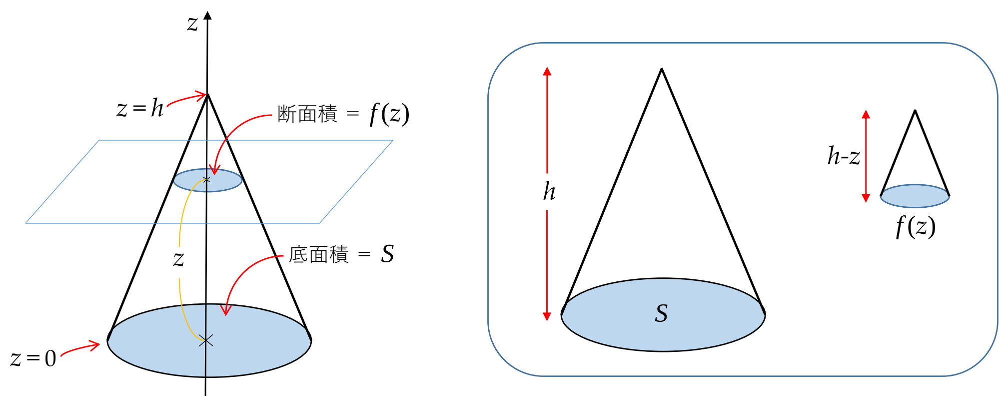
となる．これから α,β を消去して，求める平面の式は

$$\boxed{2x-z=0}$$

となる．

問題 5 以下の量を積分計算によって求めよ（答えのみは不可）．

(5-1) 底面積 S，高さ h の円錐の体積 V．



円錐を z 軸に垂直な平面で薄切りにする．十分薄く切れば，ひとつひとつの立体は円柱とみなすことができる．高さ z の部分の円柱の体積は，そこでの断面積 $f(z)$ × 厚み $\mathrm{d}z$ で求まる．

右図を見て分かるように，断面積 $f(z)$ は面積の相似比

$$S : f(z) = h^2 : (h-z)^2$$

より，

$$f(z) = \frac{S}{h^2}(h-z)^2$$

で与えられる．したがって，円柱の体積 $\mathrm{d}V$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= f(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{S}{h^2}(h-z)^2\mathrm{d}z\end{aligned}$$

となる．これを全て足し合わせて，

$$\begin{aligned}V &= \int \mathrm{d}V \\ &= \int_0^h f(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{S}{h^2}\int_0^h (h-z)^2\mathrm{d}z \\ &= \frac{S}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h \\ &= \boxed{\frac{hS}{3}}\end{aligned}$$

となる．

(5-2) 半径 r の球の表面積 S.

前問と同様に z 軸に垂直な平面で細かく切り，一つの帯に注目する．帯の周長は $2\pi r\cos\theta$, 幅は $r\mathrm{d}\theta$ なので，微小帯の面積は

$$\mathrm{d}S = 2\pi r^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

となる．これを全て足し合わせて，

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}S \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \boxed{4\pi r^2} \end{aligned}$$

となる．

(5-3) 半径 r の球の体積 V.

球を薄い球殻に細かく切る．半径 a の球殻の表面積は $4\pi a^2$，厚みは $\mathrm{d}a$ なので，微小球殻の体積は

$$\mathrm{d}V = 4\pi a^2 \mathrm{d}a$$

となる．これを全て足し合わせて，

$$\begin{aligned} V &= \int \mathrm{d}V \\ &= \int_0^r 4\pi a^2 \mathrm{d}a \\ &= \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3} \end{aligned}$$

となる．