物理学入門　第 6 回　単振動 II

2020 年 6 月 19 日　担当：佐藤 純

問題 1 バネの上端を天井に固定し，下端に質量 m のおもりをぶら下げると，バネは自然長よりも少し伸びて，つり合いの位置で静止する．鉛直下向きに x 軸をとり，バネの上端（天井）の座標を $x=0$ とする．おもりを下に引っ張って，つり合いの位置からさらにバネを a だけ伸ばす．そして，時刻 $t=0$ にそっと手を放し，おもりを上下に振動させる．バネ自身の質量，空気抵抗は無視し，バネ定数を k，バネの自然長を ℓ とする．

(1-1) 時刻 t におけるおもりの位置を $x(t)$ とする．時刻 t におけるバネの伸びはどれだけか．

バネの全長は $x(t)$ なので，バネの伸びは

$$x(t)-\ell$$

となる．

(1-2) おもりの運動方程式 (おもりの位置 $x(t)$ に対する微分方程式) を立てよ．

おもりに働く力は重力 $+mg$ と，バネの力 $-k(x-\ell)$ なので，運動方程式は

$$m\ddot{x}=mg-k(x-\ell)$$

となる．

(1-3) $x(t)$ に対する初期条件 $x(0)$ および $\dot{x}(0)$ を書け．

つり合いの位置にあるときのバネの伸びを b とすると，重力とのつり合いから $kb=mg$ なので，$b=\dfrac{mg}{k}$ である．ここからさらに a だけ伸ばしたので，$t=0$ におけるバネの全長は

$$x(0)=\ell+\frac{mg}{k}+a$$

となる．また，そっとおもりを手から放したので，初速度はゼロ

$$\dot{x}(0)=0$$

である．

(1-4) $y(t)=x(t)-\ell-\dfrac{mg}{k}$ とし，$y(t)$ に対する微分方程式を導け．ただし，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおいて式を整理せよ．

運動方程式を変形すると，

$$\begin{aligned} m\ddot{x}&=mg-k(x-\ell)\\ &=-k\left(x-\ell-\frac{mg}{k}\right) \end{aligned}$$

$$= -ky$$

となる．また，$x(t)$ と $y(t)$ は定数の差しかないので，微分すれば等しくなる．すなわち，$y(t) = x(t) - \ell - \dfrac{mg}{k}$ の両辺を時間で微分して

$$\dot{y} = \dot{x}, \quad \ddot{y} = \ddot{x}$$

を得る．したがって，$\ddot{x} = \ddot{y}$ を運動方程式に代入して

$$m\ddot{y} = -ky$$

を得る．これを整理して

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y$$

を得る．

(1-5) $y(t)$ に対する微分方程式を解き，一般解を求めよ．

$y(t) = e^{\lambda t}$ を微分方程式 $\ddot{y} = -\omega^2 y$ に代入すると，

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t},$$
$$\lambda^2 = -\omega^2$$

と，λ に対する二次方程式が得られる．これを解くと，

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\omega$$

となる．

これを $y(t) = e^{\lambda t}$ に代入して，二つの基本解 $y(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}$, $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ が得られる．

よって，一般解はこれらの線形結合で，

$$\begin{aligned}
y(t) &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t} \\
&= A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \\
&= (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \\
&= \boxed{C\cos\omega t + D\sin\omega t}
\end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

(1-6) $y(t)$ に対する初期条件 $y(0)$ および $\dot{y}(0)$ を書け．

$y(0) = x(0) - \ell - \dfrac{mg}{k}$ および $\dot{y}(0) = \dot{x}(0)$ より，

$$y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0$$

である．

(1-7) この初期条件のもとに積分定数を決定し，$y(t)$ を求めよ．

$$y(0) = a = C\cos 0 + D\sin 0 = C$$

より，

$$C = a$$

を得る．また，

$$v(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$$

より，

$$v(0) = 0 = D\omega\cos 0 = D\omega$$

より，

$$D = 0$$

を得る．

したがって，

$$\boxed{y(t) = a\cos\omega t}$$

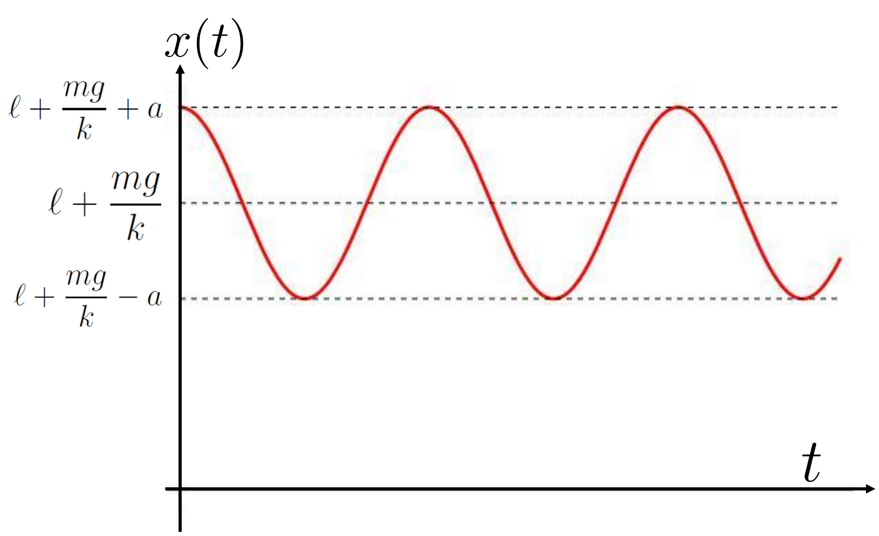
となる．

(1-8) おもりの位置 $x(t)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) + \ell + \frac{mg}{k} \\ &= a\cos\omega t + \ell + \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

となる．

(1-9) 横軸を時刻 t，縦軸をおもりの位置 $x(t)$ として，グラフを描け．

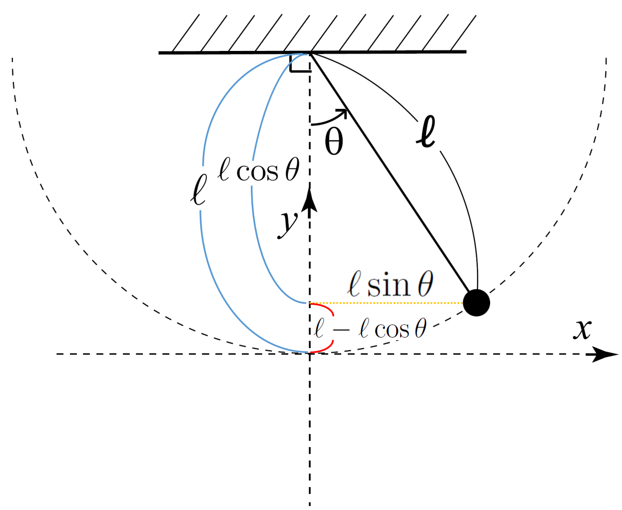


$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 糸の先におもりをつけ，他端を天井に固定して吊るす．糸の質量は無視し，おもりは鉛直面内で振動するとする．

糸の固定点を通る上向きの鉛直線を y 軸，おもりの最も低くなる点を原点とし，原点から水平方向に x 軸をとる．（図を参照）．

糸の長さを ℓ，おもりの質量を m とし，xy 面内の運動を考える．

(2-1) 単振り子の糸が y 軸となす角を θ とする．(図を参照)．
おもりの位置座標 (x, y) を θ を用いて表せ．



上図より，$x = \ell\sin\theta, \quad y = \ell(1-\cos\theta)$

(2-2) 上式を時間微分することにより，$\ddot{x}, \ddot{y}$ を $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$ の式で表せ．

まず，$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を計算する．x を t で微分したいのだが，x は $x = \ell\sin\theta$ と θ の関数として表されているので，θ を媒介して微分を行う．（合成関数の微分）

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\ &= \ell\cos\theta\,\dot{\theta}\end{aligned}$$

もう一回微分を行うが，積の微分公式 $((fg)' = f'g + fg')$ を用いて，

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ell\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\\ &= \ell\left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\right)\dot{\theta} + \ell\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ell\left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\dot{\theta} + \ell\cos\theta\,\ddot{\theta} \\
&= \ell(-\sin\theta\,\dot{\theta})\,\dot{\theta} + \ell\cos\theta\,\ddot{\theta} \\
&= -\ell\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \ell\cos\theta\,\ddot{\theta}
\end{aligned}
$$

を得る．y も同様に計算して，

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \ell\cos\theta\dot{\theta}, \quad \dot{y} = \ell\sin\theta\dot{\theta}, \\
&\ddot{x} = \ell\left\{-\sin\theta(\dot{\theta})^2 + \cos\theta\ddot{\theta}\right\}, \quad \ddot{y} = \ell\left\{\cos\theta(\dot{\theta})^2 + \sin\theta\ddot{\theta}\right\}
\end{aligned}
$$

となる．

(2-3) 重力加速度を g, 糸の張力を T とし，おもりの運動方程式を立てよ．

重力は $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$, 糸の張力は $\begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta \end{pmatrix}$ より，おもりに働く合力は $\begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix}$ となるので，運動方程式は

$$
m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix}
$$

となる．

(2-4) 上式から糸の張力 T を消去し，θ に対する微分方程式を導け．

運動方程式を成分ごとに書くと，

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -T\sin\theta, \qquad (1) \\
m\ddot{y} &= T\cos\theta - mg \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となる．糸の張力 T は未知であるので，T の係数を揃えて足すことにより，消去する．すなわち，$(1) \times \cos\theta + (2) \times \sin\theta$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
m(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) &= (-T\sin\theta)\cos\theta + (T\cos\theta - mg)\sin\theta \\
&= -T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta - mg\sin\theta \\
&= -mg\sin\theta
\end{aligned}
$$

となる．左辺に (2-2) の解答を代入すると

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta &= \ell\left\{-\sin\theta(\dot{\theta})^2 + \cos\theta\ddot{\theta}\right\}\cos\theta + \ell\left\{\cos\theta(\dot{\theta})^2 + \sin\theta\ddot{\theta}\right\}\sin\theta \\
&= \ell\left\{-\sin\theta\cos\theta(\dot{\theta})^2 + \cos^2\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\sin\theta(\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta\ddot{\theta}\right\} \\
&= \ell(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\ddot{\theta} \\
&= \ell\ddot{\theta} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となるので，

$$\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

を得る．

(2-5) 振り子の振り幅が十分小さいとき，振り子の運動は単振動になることを示し，振動の周期を求めよ．

$|\theta| \ll 1$ のとき，$\sin\theta \sim \theta$ より，$\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0$ となる．これは単振動の微分方程式であり，$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ とおけば $\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ が一般解となる．したがって，周期 $T = 2\pi/\omega$ は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

となり，おもりの質量や振れ幅によらず，糸の長さ ℓ だけで決まる（振り子の等時性）．