物理学入門　第 5 回　単振動 I

2020 年 6 月 12 日　　担当：佐藤 純

問題 1　t の関数 $x(t)$ に対する以下の微分方程式の一般解を求め，与えられた初期条件のもとに積分定数を決定せよ．ただし，$\ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とする．

(1-1) $\ddot{x} - 4x = 0$　初期条件：$x(0) = 3$，$\dot{x}(0) = -6$

定数係数の線形微分方程式なので，指数関数型の解

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

を仮定する．これを微分すると

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda t} - 4e^{\lambda t} = 0, \\ &e^{\lambda t}(\lambda^2 - 4) = 0, \\ &\lambda^2 - 4 = 0, \\ &\lambda = \pm 2 \end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda t} > 0$ であることを使った．

これを $x(t) = e^{\lambda t}$ に代入して，2 つの特解

$$x(t) = e^{2t},\, e^{-2t}$$

を得る．よって，この微分方程式の一般解は

$$x(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} \quad (A, B \text{ は積分定数}) \tag{1}$$

となる．初期条件から，積分定数 A, B を決定する．まず，

$$x(0) = A + B = 3$$

である．次に，

$$\dot{x}(t) = 2Ae^{2t} - 2Be^{-2t}$$

より，

$$\dot{x}(0) = 2(A - B) = -6, \quad A - B = -3$$

である．以上より，

$$A = 0, B = 3$$

を得る．したがって，$\boxed{x(t) = 3e^{-2t}}$ となる．

(1-2) $\ddot{x}+9x=0$　初期条件：$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=6$

定数係数の線形微分方程式なので，指数関数型の解

$$x(t)=e^{\lambda t}$$

を仮定する．これを微分すると

$$\dot{x}(t)=\lambda e^{\lambda t},\quad \ddot{x}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$$

となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda t}+9e^{\lambda t}=0,\\
&e^{\lambda t}(\lambda^2+9)=0,\\
&\lambda^2+9=0,\\
&\lambda=\pm 3\mathrm{i}
\end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda t}>0$ であることを使った．

これを $x(t)=e^{\lambda t}$ に代入して，２つの特解

$$x(t)=e^{3\mathrm{i}t},\ e^{-3\mathrm{i}t}$$

を得る．
よって，この微分方程式の一般解は

$$x(t)=Ae^{3\mathrm{i}t}+Be^{-3\mathrm{i}t}\quad (A,B\text{ は積分定数}) \tag{2}$$

となる．あるいは，オイラーの公式を使って指数関数を三角関数に直すと，

$$\begin{aligned}
x(t)&=Ae^{3\mathrm{i}t}+Be^{-3\mathrm{i}t}\\
&=A(\cos 3t+\mathrm{i}\sin 3t)+B(\cos 3t-\mathrm{i}\sin 3t)\\
&=(A+B)\cos 3t+\mathrm{i}(A-B)\sin 3t\\
&=C\cos 3t+D\sin 3t\quad (C,D\text{ は積分定数})
\end{aligned} \tag{3}$$

となる．ただし，$C=A+B,\ D=\mathrm{i}(A-B)$ とおいた．

上の (1) 式と (2) 式は等価であり，どちらを使ってもよいが，初期値問題を解く際には (2) 式の方が楽なことが多いので，以下の問題では断りなく (2) 式の形に書き換えることもある．

初期条件から，積分定数 C,D を決定する．$x(0)=C=0$ なので，

$$x(t)=D\sin 3t$$

となる．

これを微分すると $\dot{x}(t)=3D\cos 3t$ となる．

$\dot{x}(0)=6=3D$ なので，$D=2$ となる．

したがって，$\boxed{x(t)=2\sin 3t}$ を得る．

(1-3) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$　初期条件：$x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 12$

定数係数の線形微分方程式なので，指数関数型の解

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

を仮定する．これを微分すると

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 13 e^{\lambda t} = 0, \\
&e^{\lambda t}(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0, \\
&\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \\
&\lambda = -2 \pm \sqrt{2^2 - 13} = -2 \pm 3\mathrm{i}
\end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda t} > 0$ であることを使った．

これを $x(t) = e^{\lambda t}$ に代入して，２つの特解

$$x(t) = e^{(-2+3\mathrm{i})t},\ e^{(-2-3\mathrm{i})t}$$

を得る．よって，この微分方程式の一般解は，A, B を積分定数として

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-2+3\mathrm{i}t} + Be^{-2-3\mathrm{i}t} \\
&= Ae^{(-2t)+(3\mathrm{i}t)} + Be^{(-2t)+(-3\mathrm{i}t)} \\
&= Ae^{-2t}e^{3\mathrm{i}t} + Be^{-2t}e^{-3\mathrm{i}t} \\
&= e^{-2t}\left(Ae^{3\mathrm{i}t} + Be^{-3\mathrm{i}t}\right)
\end{aligned}$$

と書ける．あるいは，オイラーの公式を使って指数関数を三角関数に直すと，

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-2t}\left(Ae^{3\mathrm{i}t} + Be^{-3\mathrm{i}t}\right) \\
&= e^{-2t}\left[A(\cos 3t + \mathrm{i}\sin 3t) + B(\cos 3t - \mathrm{i}\sin 3t)\right] \\
&= e^{-2t}\left[(A+B)\cos 3t + \mathrm{i}(A-B)\sin 3t\right] \\
&= e^{-2t}\left(C\cos 3t + D\sin 3t\right) \quad (C, D \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A + B,\ D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

初期条件から，積分定数 C, D を決定する．$x(0) = C = 0$ なので，

$$x(t) = De^{-2t}\sin 3t$$

となる．これを微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= D(e^{-2t})'\sin 3t + De^{-2t}(\sin 3t)' \\
&= -2De^{-2t}\sin 3t + 3De^{-2t}\cos 3t
\end{aligned}$$

となる．$\dot{x}(0) = 12 = 3D$ なので，$D = 4$ となる．

したがって，$\boxed{x(t) = 4e^{-2t}\sin 3t}$ を得る．

問題 2 バネの一端に質量 m のおもりを付け，滑らかな机の上に置いて，他端を固定する．
おもりを引っ張ってバネを a だけ伸ばし，$t=0$ におもりを静かに離したとする．
おもりを引っ張る方向に x 軸をとり，バネのつり合いの位置を $x=0$ とする．
バネ自身の質量は無視し，バネ定数を k とする．

(2-1) おもりの運動方程式を立てよ．

バネがおもりに及ぼす力は $-kx$ と書けるので，運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

となる．

(2-2) 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し，λ に対する方程式を導け．

$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t},$$

$$\boxed{m\lambda^2 = -k}$$

と，λ に対する二次方程式が得られる．

(2-3) 上で求めた方程式から λ を決定し，運動方程式の一般解を求めよ．

上で求めた二次方程式を解くと，

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm \mathrm{i}\omega$$

となる．ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおいた．

これを $x(t) = e^{\lambda t}$ に代入して，二つの基本解 $x(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}$, $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ が得られる．
よって，一般解はこれらの線形結合で，

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \\ &= (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \\ &= \boxed{C\cos\omega t + D\sin\omega t} \end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A+B$, $D = \mathrm{i}(A-B)$ とおいた．

(2-4) 運動方程式の初期条件 $x(0)$，$\dot{x}(0)$ を決定せよ．

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

(2-5) 上で求めた初期条件をもとに，時刻 t におけるおもりの位置 $x(t)$ を求めよ．

$$x(0) = a = C\cos 0 + D\sin 0 = C$$

より，

$$C = a$$

を得る．また，

$$v(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$$

より，

$$v(0) = 0 = D\omega\cos 0 = D\omega$$

より，

$$D = 0$$

を得る．

　したがって，

$$\boxed{x(t) = a\cos\omega t}$$

となる．

(2-6) 時刻 t におけるおもりの速度 $v(t)$ を求めよ．

$$v(t) = -a\omega\sin\omega t$$