物理学入門　第4回　空気抵抗中の落下運動 II

2020年6月5日　　担当：佐藤 純

問題1 粘土に質量 m の弾丸を速度 v_0 で撃ち込んだ．弾丸は粘土にめりこんだ後，速度に比例する抵抗力を受けるとし，その比例定数を γ とする．

弾丸は常に直進し，曲がることはないとする．また，重力の影響は無視する．

弾丸の進む方向に x 軸を取る．粘土に入射した瞬間を $t=0$ とし，そのときの弾丸の位置を $x=0$ とする．

(1-1) 弾丸の運動方程式を立てよ．

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\gamma v$$

(1-2) 問題設定の状況を読み取り，初期条件 $x(0)$ と $v(0)$ を書け．

$$x(0) = 0, \quad v(0) = v_0$$

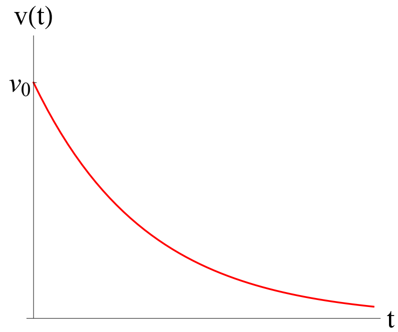
(1-3) 運動方程式を解くことにより，時刻 t における弾丸の速度 $v(t)$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
&m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\gamma v, \\
&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}v, \\
&\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int -\frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t, \\
&\log v = -\frac{\gamma}{m}t + C, \\
&v(t) = e^{-\frac{\gamma}{m}t+C} = e^{-\frac{\gamma}{m}t}e^{C} = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (A = e^{C})
\end{aligned}$$

$v(0) = v_0$ より，$A = v_0$．

$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}}$$

(1-4) 横軸を時刻 t，縦軸を弾丸の速度 $v(t)$ として，グラフを描け．



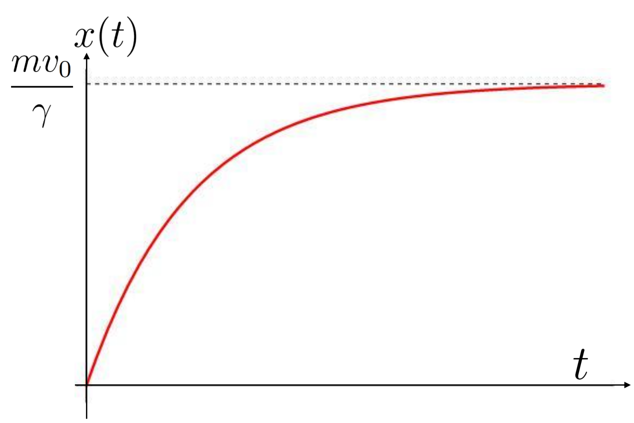
(1-5) 時刻 t における弾丸の位置 $x(t)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\mathrm{d}t \\ &= \int v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}\mathrm{d}t \\ &= v_0\left(-\frac{m}{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{m}t}+C \\ &= -\frac{mv_0}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t}+C \end{aligned}$$

$x(0)=0$ より，$C=\dfrac{mv_0}{\gamma}$ なので，

$$x(t)=\frac{mv_0}{\gamma}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

(1-6) 横軸を時刻 t，縦軸を弾丸の位置 $x(t)$ として，グラフを描け．



(1-7) 弾丸が粘土にめりこむ長さ ℓ を求めよ．

$$\ell = \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{mv_0}{\gamma}$$

問題 2 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し，ボールを落下させる．
その際，ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし，その比例定数を γ とする．
鉛直下向きに x 軸を取り，ボールの初期位置を $x=0$ とする．

(2-1) ボールの運動方程式を立てよ．

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v$$

(2-2) 空気抵抗と重力が釣り合う条件から，時刻無限大 $t\to\infty$ でのボールの速度 v_∞ を求めよ．

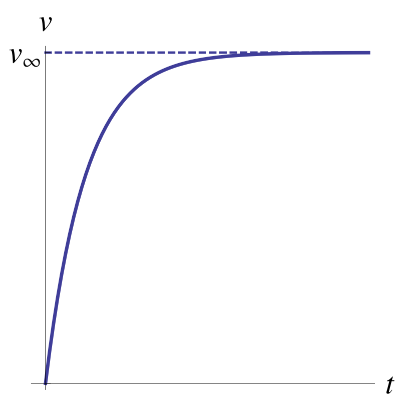
$mg = \gamma v_\infty$ より，$v_\infty = \dfrac{mg}{\gamma}$

(2-3) 運動方程式を解くことにより，時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求め，グラフを描け．

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}\left(v - v_\infty\right),$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v-v_\infty} = -\int\frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t, \quad \log(v-v_\infty) = -\frac{\gamma}{m}t + A, \quad v - v_\infty = Be^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (B = e^A)$$

ここで，初期条件 $v(0)=0$ より，$-v_\infty = B$ なので，$\boxed{v = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}$ を得る．



(2-4) 空気抵抗を小さくする極限 $\gamma\to 0$ で，ボールの運動は空気抵抗がない場合の自由落下 $(v(t) = gt)$ になることを示せ．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

より，

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\gamma}{m}t} &= 1 + \left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{t}{m}\gamma + \frac{t^2}{2m^2}\gamma^2 - \frac{t^3}{6m^3}\gamma^3 + \cdots \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma\to 0} v(t) &= \lim_{\gamma\to 0} v_\infty\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\gamma \to 0} \frac{mg}{\gamma} \left(\frac{t}{m}\gamma - \frac{t^2}{2m^2}\gamma^2 + \frac{t^3}{6m^3}\gamma^3 + \cdots \right) \\
&= \lim_{\gamma \to 0} mg \left(\frac{t}{m} - \frac{t^2}{2m^2}\gamma + \frac{t^3}{6m^3}\gamma^2 + \cdots \right) \\
&= mg \cdot \frac{t}{m} \\
&= gt
\end{aligned}
$$

となる．

（別解）

$$
\begin{aligned}
\lim_{\gamma \to 0} v(t) &= \lim_{\gamma \to 0} v_\infty \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\
&= \lim_{\gamma \to 0} \frac{mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\
&= mg \lim_{\gamma \to 0} \frac{1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{\gamma}
\end{aligned}
$$

となるが，これは 0/0 の不定形なのでロピタルの定理より

$$
\begin{aligned}
\lim_{\gamma \to 0} v(t) &= mg \lim_{\gamma \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\gamma} \\
&= mg \lim_{\gamma \to 0} \frac{-\left(-\frac{t}{m}\right) e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{1} \\
&= mg \cdot \frac{t}{m} \\
&= gt
\end{aligned}
$$

となる．