物理学入門　第3回　空気抵抗中の落下運動 I

2020 年 5 月 29 日　　担当：佐藤 純

問題 1 x の関数 y に対する以下の微分方程式の一般解を求めよ．だたし，$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ であるとする．また，得られた解が実際に微分方程式を満たしていることを確かめよ．

(1-1) $y' = 3y$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\int \mathrm{d}x, \quad \log y = 3x + A, \quad y = e^{3x+A} = e^{A}e^{3x}.$$

ここで，$B = e^A$ とおくと，$\boxed{y = Be^{3x}}$

(1-2) $y' = x(1-y)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(1-y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = x\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int x\mathrm{d}x, \quad -\log(1-y) = \frac{1}{2}x^2 + A,$$
$$\log(1-y) = -\frac{1}{2}x^2 - A, \quad 1 - y = e^{-\frac{1}{2}x^2 - A} = e^{-A}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

ここで，$B = e^{-A}$ とおくと，$\boxed{y = 1 + Be^{-\frac{1}{2}x^2}}$

(1-3) $y' = y^2x^3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2x^3, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x^3\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x^3\mathrm{d}x, \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{4}x^4 + A,$$
$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{4}x^4 - A, \quad y = \frac{1}{-\frac{1}{4}x^4 - A} = \frac{4}{-x^4 - 4A}$$

ここで，$B = -4A$ とおくと，

$$\boxed{y = \frac{4}{B - x^4}}$$

(1-4) $yy' = x$

$$y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x, \quad \int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x, \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + A, \quad y^2 = x^2 + 2A = x^2 + B \quad (B = 2A)$$

$\boxed{y = \pm\sqrt{x^2 + B}}$

(1-5) $y' + y\tan x = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\tan x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \tan x\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\mathrm{d}x,$$
$$\log y = \log\cos x + A, \quad y = e^{\log\cos x + A} = e^{A}e^{\log\cos x} = e^{A}\cos x.$$

ここで，$B = e^A$ とおくと，$\boxed{y = B\cos x}$

問題 2 以下の微分方程式を初期条件 $(x, y) = (0, 1)$ のもとで解け.（問題 1 の結果を使ってよい）

(2-1) $y' = 3y$
一般解 $y = Be^{3x}$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入すると

$$1 = Be^0 = B$$

より $B = 1$ を得るので，$\boxed{y = e^{3x}}$ となる．

(2-2) $y' = y^2 x^3$
一般解 $y = \dfrac{4}{B - x^4}$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入すると

$$1 = \frac{4}{B}$$

より $B = 4$ を得るので，$\boxed{y = \dfrac{4}{4 - x^4}}$ となる．

(2-3) $yy' = x$
一般解 $y = \pm\sqrt{x^2 + B}$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入すると

$$1 = \pm\sqrt{B}$$

より，複号は $\pm \to +$ であり，$B = 1$ を得るので，$\boxed{y = \sqrt{x^2 + 1}}$ となる．

(2-4) $y' + y\tan x = 0$
一般解 $y = B\cos x$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入すると

$$1 = B\cos 0 = B$$

より，$B = 1$ を得るので，$\boxed{y = \cos x}$ となる．