# 物理学入門　第2回　自由落下

2020年5月22日　担当：佐藤 純

**問題1** 地上から真上に初速度 $v_0$ で質量 $m$ の物体を発射する．鉛直上向きに $x$ 軸をとり，物体を発射した位置 (地面) を $x=0$ とする．重力加速度は $g$ とし，質量 $m$ の物体には重力 $mg$ が鉛直下向きに働くとする．空気抵抗の影響は無視する．

**(1-1)** 物体の運動方程式を立てよ．

$ma = -mg$

**(1-2)** 物体を発射した瞬間 $(t=0)$ の物体の位置 $x(0)$，速度 $v(0)$，加速度 $a(0)$ を書け．

$x(0) = 0$，$v(0) = v_0$，$a(0) = -g$

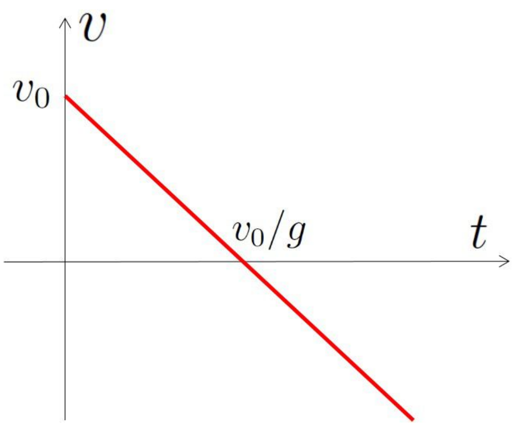
**(1-3)** 物体が最高点に達した瞬間 $(t=T)$ の物体の速度 $v(T)$，加速度 $a(T)$ を書け．

$v(T) = 0$，$a(T) = -g$

**(1-4)** 運動方程式を一回積分することにより，物体の速度 $v(t)$ を時間の関数として表し，グラフを描け．

$$v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int(-g)\mathrm{d}t = -gt + C$$

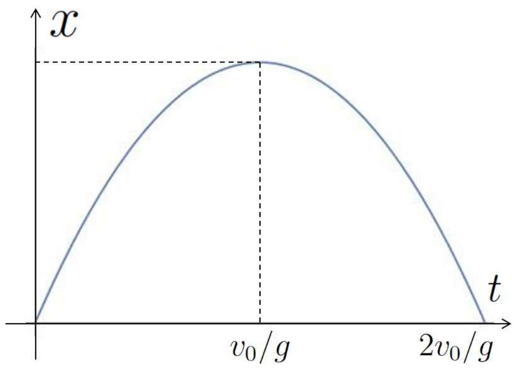
$v(0) = v_0$ より，$C = v_0$．したがって，$\boxed{v(t) = v_0 - gt}$




**(1-5)** 運動方程式をもう一回積分することにより，物体の位置 $x(t)$ を時間の関数として表し，グラフを描け．

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int(v_0 - gt)\mathrm{d}t = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C$$

$x(0) = 0$ より，$C = 0$．したがって，$\boxed{x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2}$




**(1-6)** 物体が最高点に達する時間 $T$ を求めよ．

$$v(T) = v_0 - gT = 0 \text{ より，} \boxed{T = \frac{v_0}{g}}$$

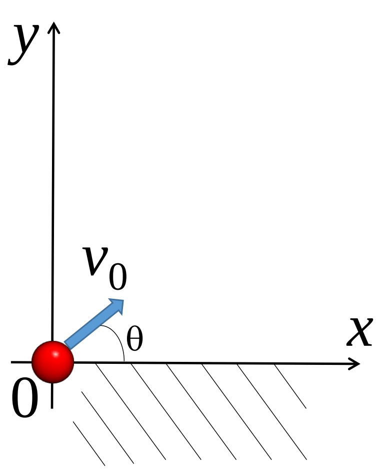
**(1-7)** 最高点の高さを求めよ．

$$x(T) = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \boxed{\frac{v_0^2}{2g}}$$

**問題 2** 地上から角度 $\theta$ で斜めに初速度 $v_0$ で質量 $m$ の物体を発射する．重力加速度は $g$ とし，質量 $m$ の物体には重力 $mg$ が鉛直下向きに働くとする．空気抵抗の影響は無視する．

**(2-1)** 物体の運動を記述するのに適切な座標軸を設定し，物理的状況とともに図示せよ．

発射地点を原点にとり，水平方向に $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸をとる．物体は $xy$ 面内を $x$ 軸の正の方向に運動するとする．




**(2-2)** 物体に働く力ベクトル $\overrightarrow{F}$ を求めよ．

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

**(2-3)** 時刻 $t$ における物体の位置ベクトルを $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$，速度ベクトルを $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$，加速度ベクトルを $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$，として，運動方程式を立てよ．

$$m\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

**(2-4)** 運動方程式の各成分を一回積分することにより，物体の速度ベクトル $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$ を時間の関数として表せ.

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t = \int 0\,\mathrm{d}t = C$$

となる．$v_x(0) = v_0 \cos\theta$ より，$C = v_0 \cos\theta$ なので，$v_x(t) = v_0 \cos\theta$.

$$v_y(t) = \int a_y(t)\mathrm{d}t = -gt + D$$

となる．$v_y(0) = v_0 \sin\theta$ より，$D = v_0 \sin\theta$ なので，$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt$.

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta - gt \end{pmatrix}}$$

**(2-5)** 運動方程式の各成分をもう一回積分することにより，物体の位置ベクトル $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を時間の関数として表せ.

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = v_0 t \cos\theta + C$$

となる．$x(0) = 0$ より，$C = 0$ なので，$x(t) = v_0 t \cos\theta$.

$$y(t) = \int v_y(t)\mathrm{d}t = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + D$$

となる．$y(0) = 0$ より，$D = 0$ なので，$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\theta \\ v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}}$$

**(2-6)** 地上に落下する時間と，水平到達距離を求めよ.

$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = t(2v_0 \sin\theta - gt) = 0$$

より，

$$t = \boxed{2v_0 \sin\theta / g}$$

そのとき，

$$x(t) = v_0(2v_0 \sin\theta/g)\cos\theta = \boxed{v_0^2 \sin 2\theta / g}$$

**(2-7)** 水平到達距離を最大にする発射角度 $\theta$ を求めよ.

$\sin 2\theta$ は $2\theta = 90^\circ$ で最大となるので，水平到達距離を最大とする $\theta$ は $\boxed{\theta = 45^\circ}$